82 Variationsmethoden

82.1 Randwertprobleme für die Poisson-Gleichung. Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $g : \partial\Omega \mapsto \mathbb{K}$ sowie $f : \Omega \mapsto \mathbb{K}$ vorgegebene Funktionen. Man sucht dann eine Lösung $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ des Problems

$$-\Delta u \;=\; f \;\text{ in }\; \Omega\,, \quad u|_{\partial\Omega} = g \;\text{ auf }\; \partial\Omega\,. \tag{1}$$

Hierbei kann $u(x)$ die Auslenkung einer am Rand mittels g eingespannten Membran unter der Kraft $f(x)$ (etwa Schwerkraft) sein oder auch eine stationäre Temperaturverteilung mit vorgegebener Randtemperatur g und Energiequelle f.

82.2 Das Dirichletsche Prinzip. a) Wir betrachten zunächst den Fall $f = 0$. Seit ca. 1840 wurde ein von B. Riemann nach P.G.L.-Dirichlet benanntes *Variationsprinzip* zur Lösung des Dirichlet-Problems (1) verwendet. Für $\mathcal{C}^1$-Funktionen auf dem beschränkten Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert man die *Dirichlet-Form*

$$D(u,v) := \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \partial_j u(x)\, \overline{\partial_j v(x)}\, d^n x \tag{2}$$

und sucht unter allen Funktionen $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ mit vorgegebenen Randwerten $u|_{\partial\Omega} = g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ eine solche mit *minimalem Dirichlet-Integral* $D(u) := D(u,u)$; in obigem Modell ist etwa $\frac{1}{2} D(u)$ die *innere Energie* der Membran.

b) Für *Testfunktionen* $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) =: \mathcal{D}(\Omega)$ gilt dann

$$D(u + t\varphi) \;=\; D(u) + 2\,\operatorname{Re}\, \bar{t}\, D(u,\varphi) + |\,t\,|^2\, D(\varphi) \;\geq\; D(u)$$

für alle $t \in \mathbb{C}$, also $D(u,\varphi) = 0$. Partielle Integration liefert dann

$$-\int_\Omega \Delta u(x)\,\varphi(x)\, d^n x \;=\; D(u,\bar{\varphi}) \;=\; 0$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Daraus folgt dann $\Delta u = 0$ in Ω nach dem

82.3 Satz (Fundamentallemma der Variationsrechnung). *Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, und für $h \in L_1^{loc}(\Omega)$ gelte*

$$\int_\Omega h(x)\,\varphi(x)\, d^n x \;= 0 \quad \textit{für alle} \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,. \tag{3}$$

Dann gilt $h = 0$ (fast überall.)

82.4 Bemerkungen. a) Die *Minimierung* eines *Funktionals* liefert also eine *Lösung einer Differentialgleichung!*

b) Die Existenz solcher Minima ist allerdings nicht ohne weiteres klar, da man in unendlichdimensionalen Räumen nicht ohne Weiteres mit Kompaktheits-Argumenten wie in Satz 48.17 arbeiten kann. Im Jahre 1869 wies K. Weierstraß darauf hin, daß trotz $D(u) \geq 0$ für alle u die Existenz einer Funktion u mit minimalem Dirichlet-Integral nicht gesichert ist; in der Tat gibt es bereits im Fall der Kreisscheibe $K = K_1(0)$ in $\mathbb{R}^2$ Randfunktionen $g \in \mathcal{C}(\partial K)$, für die die Lösung des Dirichlet-Problems (gemäß 81.10) *kein endliches Dirichlet-Integral* besitzt.

c) Erst ab etwa 1900 wurde das Dirichletsche Prinzip von D. Hilbert, R. Courant und anderen zu einer wirksamen Methode in der Variationsrechnung und der Theorie der Randwertprobleme ausgebaut; auf Variationsprinzipien beruht auch die Methode der *Finiten Elemente* zur *numerischen Berechnung* von Näherungslösungen. Dabei arbeitet man in geeigneten *Hilbert-Funktionenräumen,* da dann jede beschränkte Folge immerhin eine *schwach konvergente Teilfolge* besitzt. Man erhält allerdings i. a. nur

82.5 Schwache Lösungen. a) Nach dem Fundamentallemma 82.3 ist für eine Funktion $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ die Gleichung

$$-\Delta u \;=\; f \;\text{ in }\; \Omega \tag{4}$$

äquivalent zu

$$-\int_\Omega \Delta u(x)\,\varphi(x)\,d^n x \;=\; \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,d^n x \quad \text{für alle } \;\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

Partielle Integration liefert die weitere Äquivalenz

$$-\int_\Omega u(x)\,\Delta\varphi(x)\,d^n x \;=\; \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,d^n x \quad \text{für alle } \;\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,. \tag{5}$$

b) In (5) muß nun u nicht mehr differenzierbar sein! Für $f \in L_2(\Omega)$ nennt man nun $u \in L_2(\Omega)$ eine *schwache Lösung* von (4), wenn (5) gilt! Auch die Randbedingung in (1) kann analog *schwach* interpretiert werden.

c) Analog zu a) und b) definiert man auch *schwache erste partielle* Ableitungen und definiert den *Sobolev-Hilbertraum*

$$W^1(\Omega) := \;\{u \in L_2(\Omega) \mid \forall\, j\; \exists\; \partial_j u \in L_2(\Omega)\}\,. \tag{6}$$

d) Mit Hilbertraum-Methoden kann man nun zeigen, daß das auf $W^1(\Omega)$ definierte Funktional

$$F(v) := \;\tfrac{1}{2}\,D(v) - \int_\Omega f\,v\,d^n x \tag{7}$$

unter der schwachen Randbedingung $v|_{\partial\Omega} = g$ (für geeignete, z. B. stetig differenzierbare Randfunktionen g) ein *Minimum* $u \in W^1(\Omega)$ besitzt. Ähnlich wie in 82.2 b) folgt dann die Gültigkeit von (1) im schwachen Sinn.

e) Die bisherigen Überlegungen gelten für alle beschränkten Gebiete Ω. Unter geeigneten *Glattheitsbedingungen* an den Rand läßt sich zeigen, daß die Lösung $u \in W^1(\Omega)$ von (1) sogar in $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ liegt und dann eine *klassische Lösung* des Problems (1) ist.

Wir gehen auf die angedeuteten Methoden in HM 4 genauer ein.

82.6 Lagrange-Funktionen. a) Für *gewöhnliche Differentialgleichungen* ist die Existenzfrage wesentlich leichter zu beantworten als für partielle Differentialgleichungen. Gleichungen der klassischen Mechanik können allerdings auch aus *Variationsprinzipien* hergeleitet werden:

b) Es seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $L \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ gegeben. Gesucht werden lokale Extremalstellen des Funktionals

$$V : f \mapsto \int_a^b L(x, f(x), f'(x))\,dx \tag{8}$$

auf der Funktionenmenge

$$E_{c,d} := \;\{f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R}) \mid f(a) = c\,,\; f(b) = d\}\,. \tag{9}$$

Es ist $E_{c,d}$ ein *affiner* Unterraum von $\mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$. Mit (x,y,p) werden die Variablen in $[a,b] \times \mathbb{R}^2$ bezeichnet.

82.7 Satz. *Eine lokale Extremalstelle* $f \in E_{c,d}$ *des Funktionals* V *erfüllt die* Eulersche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\partial L}{\partial p}(x, f(x), f'(x)) - \frac{\partial L}{\partial y}(x, f(x), f'(x)) \;=\; 0\,. \tag{10}$$

Der Beweis benutzt wieder das Fundamentallemma der Variationsrechnung.

82.8 Beispiele und Bemerkungen. a) Führt man die Differentiation in (10) aus, so erhält man

$$\partial_x\partial_p L + \partial_y\partial_p L\, f' + \partial_p^2 L\, f'' - \partial_y L \;=\; 0\,. \tag{11}$$

Hängt speziell L nicht von x ab, so ist $\partial_x L = \partial_x\partial_p L = 0$, und man erhält

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}\,(\partial_p L\, f' - L) \;&=\; \partial_y\partial_p L\, f'^{\,2} + \partial_p^2 L\, f''\, f' + \partial_p L\, f'' - \partial_y L\, f' - \partial_p L\, f'' \\ &=\; (\partial_y\partial_p L\, f' + \partial_p^2 L\, f'' - \partial_y L)\, f' \;=\; 0\,, \quad \text{also} \end{aligned}$$

$$\partial_p L(f(x), f'(x))\, f'(x) - L(f(x), f'(x)) \;=\; C\,. \tag{12}$$

b) Unter allen Funktionen in $E_{c,d}$ soll diejenige bestimmt werden, deren *Graph minimale Länge* hat. Mit $L(x, y, p) := \sqrt{1+p^2}$ ist diese Länge gerade durch $V(g) = \int_a^b L(x, g(x), g'(x))\, dx$ gegeben. Man hat $\partial_p L = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$; für lokale Extremalstellen f von V gilt also

$$\frac{f'^{\,2}}{\sqrt{1+f'^{\,2}}} - \sqrt{1+f'^{\,2}} \;=\; C \;\Leftrightarrow\; C\,\sqrt{1+f'^{\,2}} \;=\; -1\,,$$

d. h. es muß f' konstant und somit $f(x) = c + (d-c)\,\frac{x-a}{b-a}$ sein. In diesem einfachen Fall läßt sich leicht zeigen, daß V tatsächlich in f minimal wird.