Globalübung, 16.07.2014

Übungsblatt 14

Leider haben sich in meine Lösung an der Tafel Fehler eingeschlichen. Diese wurden unten korrigiert. A. Hück

Aufgabe 1

(a) $y' = \frac{2y}{t}$; $y(t_0) = y_0$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{t} \quad \Big| \int_{t_0}^{t} \qquad (y \neq 0)$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'}{y}\, ds = \int_{t_0}^{t} \frac{2}{s}\, ds$$

$$\Rightarrow \ln|y(s)|\Big|_{t_0}^{t} = 2\ln|s|\Big|_{t_0}^{t}$$

$$\Rightarrow |y(t)| = \exp\left[(\ln|y(t_0)| + 2(\ln|t| - \ln|t_0|)\right]$$

$$= |y(t_0)| \cdot \frac{t^2}{t_0^2}$$

$y(t) = \exp[2\ln(t) + C]$

$\Rightarrow y(t) = t^2 \exp(C)$

$$\Rightarrow y(t) = y(t_0) \cdot t^2 / t_0^2$$

(b) $y' = e^y \cos t$; $y(\underline{\underline{0}}) = y_0$

$$\frac{y'}{e^y} = \cos t \quad \Big| \int_{\underline{\underline{0}}}^{t}$$

$$\int_{\underline{\underline{0}}}^{t} \frac{y'}{e^y}\, ds = \int_{0}^{t} \cos(s)\, ds$$

$$\Rightarrow -\exp(-s)\Big|_0^t = \sin(s)\Big|_0^t$$

$$\Rightarrow y(t) = -\ln\left(e^{-y_0} - \sin t\right)$$

(c) $y' = \frac{1}{y}\sqrt{1-y^2}$; $y(0) = y_0$

$$\int_0^t \frac{y' \cdot y}{\sqrt{1-y^2}}\, ds = \int_0^t ds \qquad (y \neq 0,\ y \neq \pm 1)$$

$$\Rightarrow -\sqrt{1-y^2(s)}\Big|_0^t = t$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm \sqrt{1-\left(\sqrt{1-y_0^2} - t\right)^2}$$

wähle Lösung so, dass $y(0) = y_0$

Aufgabe 2

(a) $y' = (x+y)^2$, x Konstante

$z = x+y \Rightarrow z' = y'$

$\Rightarrow z' = z^2$

$\Rightarrow \frac{z'}{z^2} = 1$

Entweder: unbestimmtes Integral

$-\frac{1}{z(t)} = t + C$

$\Rightarrow z(t) = -(t+C)^{-1}$

$y(t) = -(t+C)^{-1} - x$

Oder: $z(t_0) = z_0$

$-\frac{1}{z(s)}\Big|_{t_0}^{t} = t - t_0$

$\Rightarrow z(t) = -(\underbrace{t - t_0 + \frac{1}{z_0}}_{+C})^{-1}$

(b) $y' + y + (\sin t + e^t)y^3 = 0$, $(y > 0)$

$z = \frac{1}{y^2}$, $z' = -\frac{2y'}{y^3}$

$\frac{y'}{y^3} = \frac{1}{y^2} + (\sin t + e^t) \Leftrightarrow z' = 2(z + \sin t + e^t)$ ⊛

Homogene Gleichung

$\tilde{z}' = 2\tilde{z} \Rightarrow \tilde{z}(t) = C e^{2t}$

Aufgabe 2a (Alternative interpretation)

$y' = (t+y)^2 \qquad z = y + t \qquad z' = y' + 1$

$\Rightarrow z' = z^2 + 1$

$\Rightarrow \int \frac{z'}{z^2+1} = t + c'$

$\Rightarrow \arctan z = t + c'$

$\Rightarrow z = \tan(t + c')$

$\Rightarrow y = \tan(t + c') - t$

Variation der Konstanten:

$z(t) = u(t) \cdot \tilde{z}(t)$
(in ⊛ eingesetzt)

also: $\cancel{\tilde{z}' u} + u' \underbrace{\tilde{z}}_{Ce^{2t}} = 2(\cancel{\tilde{z} u} + \sin t + e^t)$

$$\Rightarrow u' = \frac{2(\sin t + e^t)}{Ce^{2t}}$$

$$\Rightarrow u = \int \frac{2\sin t}{Ce^{2t}} + \int \frac{2}{Ce^t} + C^*$$

$$\int \frac{2\sin t}{Ce^{2t}} = \frac{\cancel{4}\,2}{5C}\left(\frac{1}{2} \cdot \cos t \cdot e^{-2t} - 2 e^{-2t} \sin t\right)$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{C}\left[\frac{\cancel{4}\,2}{10} \cdot \frac{\cancel{4}\,2}{5} e^{-2t} \cos t - \frac{4}{5} e^{-2t} \sin t - 2e^{-t}\right] + C^*$$

$$Y = \pm\sqrt{\frac{1}{z}} = \pm\sqrt{u^{-1} \tilde{z}^{-1}} \qquad Y > 0$$

$$Y = \left[\left[\frac{\cancel{4}\,2}{10} e^{2t} - \frac{\cancel{4}\,2}{5} \cos t - \frac{4}{5} \sin t - 2e^t\right] + C \cdot C^* e^{2t}\right]^{-1/2}$$

Aufgabe 3

Aus Vorl. bekannt.

Da rechte Seite von

$Y_1' = -Y_2$

$Y_2' = Y_1$ Lipschitz-stetig, insbesondere

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

konvergiert das folgende Iterationsverfahren gleichmäßig:

$$\tilde{Y}_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{Y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{Y}_0(s)\, ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\tilde{Y}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\s\end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}t^2\\ t\end{pmatrix}$$

$$\tilde{Y}_3 = \begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}t^2\\ 1-\frac{1}{6}t^3\end{pmatrix}$$

$$\tilde{Y}_k = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\tilde{Y}_{k-1}(s)\, ds$$

<u>Beh:</u>

$$\tilde{Y}_k = \begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor k/2\rfloor} \frac{1}{(2j)!}(-1)^j t^{2j} \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2}\rfloor} \frac{1}{(2j+1)!}(-1)^j t^{2j+1}\end{pmatrix}$$

$\lfloor r\rfloor \mathrel{\hat{=}} r$ abgerundet

Bsp.: $\lfloor 1{,}6\rfloor = 1$

Koordinatenweise

$$\tilde{Y}_{k,1} = 1 + \int_0^t -\tilde{Y}_{k-1,2}(s)\, ds$$

$$\tilde{Y}_{k+1,1} = 1 + \int_0^t (-1)\cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2}\rfloor} \frac{1}{(2j+1)!}(-1)^j \cdot s^{2j+1}\, ds$$

$$= 1 + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2}\rfloor} \frac{1}{(2j+1)!}(-1)^{j+1} t^{2j+2}$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k+1}{2}\rfloor} \frac{1}{(2j)!}(-1)^j t^{2j} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k+1}{2}\rfloor} \frac{1}{(2j)!}(-1)^j t^{2j}$$

$$\tilde{Y}_{k+1,2} = 0 + \int_{t_0}^t \tilde{Y}_{k-1,1}(s)\, ds$$

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2}\rfloor} \frac{1}{(2j+1)!}(-1)^j t^{2j+1}$$

Also gilt im Limes $k \to \infty$: $\tilde{Y}_k \longrightarrow \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$

Aufgabe 4

$-N'(t) = \lambda N(t) \quad \Rightarrow N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$

$M'(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} - \mu M(t)$

Homogene Lösung (zu $M' = -\mu M$):

$M_{hom} = M_0 e^{-\mu t}$

$\Rightarrow M(t) = m(t) \cdot M_0 e^{-\mu t}$

$\Rightarrow m' = \frac{\lambda N_0}{M_0} e^{(\mu-\lambda)t}$

$\Rightarrow m(t) = \frac{\lambda N_0}{M_0(\mu-\lambda)} e^{(\mu-\lambda)t}$

$\Rightarrow M(t) = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} N_0 e^{\cancel{(\mu}-\lambda\cancel{)}t}$

$\square$

Anhänge:
20140716164406_001.jpg
1,0 MB