Übungsblatt 1 16.04.2014

Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2014

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Heida

1) Charakterisierung offener und abgeschlossener Mengen. (4P)

Zeigen Sie für metrische Räume X und $A, B \subset X$:

a) A ist genau dann offen, wenn $A \cap \partial A = \emptyset$.

b) B ist genau dann abgeschlossen, wenn $\partial B \subset B$.

Gelten (a) und (b) auch für topologische Räume X ?

2) Stetigkeit in metrischen Räumen. (4P)

Es seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume sowie $f : X_1 \to X_2$ eine Abbildung.

a) Zeigen Sie: f ist genau dann stetig, wenn für jede Teilmenge $A \subset X_1$ die Inklusion $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ gilt.

Anleitung: Falls f stetig, zeige, dass für $y \in f(\overline{A})$ auch $y \in \overline{f(A)}$ gilt: Es existiert $x \in \overline{A}$ mit $f(x) = y$... Für die Umkehrung, nehme man an, dass f in $x_0 \in X_1$ unstetig ist, d.h. $d_2(f(x_n), f(x_0)) > \epsilon_0$ für eine geeignete Folge $x_n \to x_0$. Betrachte dann die Menge $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass für stetige Funktionen f auch $f(\overline{A}) \neq \overline{f(A)}$ gelten kann.

3) Stetigkeit. (2P je Teilaufgabe)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{|x|+y^2}} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$h(x,y) := \begin{cases} \sin(\dfrac{x}{y^2}) & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } y = 0. \end{cases}$$

4) Metrik als stetige Funktion. (4P)

a) Sei (X,d) metrischer Raum und $x_0 \in X$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $h : X \to \mathbb{R}$ mit $h(x) := d(x_0, x)$ stetig ist.

b) Es seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume und $x_0 \in X_2$ fest gewählt. Die Abbildung $f : X_1 \to X_2$ sei stetig auf X_1. Zeigen Sie, dass die Abbildung $g : X_1 \to \mathbb{R}$, $g(x) := d_2(f(x), x_0)$ auf X_1 stetig ist.

Abgabe am 23.04.2014 um 11:00 in den Briefkästen im Foyer des Audimax.

Aktuelle Übungsblätter finden Sie auf der Homepage.