Übungsblatt 3 23.04.2014

Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2014

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Heida

1) Inneres, Rand und Abschluss. (4P + 2 Bonus)

(a) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ definiert durch $M := \overline{B_1(0)} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 > 0\}$. Geben Sie mit Begründung, jedoch ohne Beweis die Mengen $\mathring{M}$, ∂M und $\overline{M}$ an.

(b) Für $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sin \frac{1}{x}$ sei $M := \{(x, f(x)) \,|\, x \in \mathbb{R}_{>0}\} \subset \mathbb{R}^2$. Geben Sie mit Begründung, jedoch ohne Beweis die Mengen $\mathring{M}$, ∂M und $\overline{M}$ an.

(c) Beweisen Sie, dass $B_1(0)$ offen ist, indem Sie Satz 1.18 verwenden.

2) Lineare Abbildungen auf unendlichdimensionalen Räumen. (2P je Teilaufgabe)

Sei X der Vektorraum aller reellen Zahlenfolgen $(x_1, x_2, ...)$ mit nur endlich vielen Gliedern $\neq 0$. Mit der Maximumnorm $\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1, 2, ...\}$ wird X ein normierter Raum.

(a) Zeigen Sie: X ist nicht vollständig.

(b) Sei $A : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto A(x) := \sum_{i \geq 1} x_i$. Zeigen Sie: Die Abbildung A ist linear, aber nicht stetig.

3) Teilmengen von $C^0([a, b])$. (4P + 2 Bonus)

Sei $C^0([a, b])$ der Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$. Untersuchen Sie, ob die folgenden Teilmengen von $C^0([a, b])$ bzgl. der $\| \cdot \|_\infty$-Norm offen oder abgeschlossen sind:

$$A := \{f \in C^0([a, b]) : f(b) = 0\}, \qquad B := \{f \in C^0([a, b]) : f(b) > 0\},$$

$$C := \{f \in C^0([a, b]) : 0 \leq f(x) \leq 1 \text{ für alle } x \in [a, b]\}$$

4) Funktionenraum $C^1([a,b])$ (2P je Teilaufgabe)

Sei $C^1([a,b])$ der Vektorraum aller einmal stetig differenzierbaren Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit der Norm $\|f\|_{C^1} := \sup\{|f(x)| + |f'(x)| : x \in [a,b]\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $C^1([a,b])$ mit dieser Norm vollständig ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $D : C^1([a,b]) \to C^0([a,b]),\ f \mapsto f'$, stetig ist, wenn $C^1([a,b])$ mit der $\|\cdot\|_{C^1}$-Norm und $C^0([a,b])$ mit der Supremumsnorm versehen wird.

Abgabe am 30.04.2014 um 10:00 in den Briefkästen im Foyer des Audimax.

Aktuelle Übungsblätter finden Sie auf der Homepage.