

Übungen zur Vorlesung
Analysis II
Sommersemester 2014

Prof. Dr. B. Schweizer

Dr. M. Heida

1) Vereinigung kompakter Mengen (2P je Teilaufgabe)

(a) Seien X ein metrischer Raum und $A_k \subset X$, $k = 1, \dots, K$, kompakte Mengen. Zeigen Sie, dass die Vereinigung $A := \cup_{k=1}^K A_k$ ebenfalls kompakt ist.

(b) Gilt dies auch für die Vereinigung abzählbar vieler bzw. beliebig vieler kompakter Mengen ?

2) Randpunkte und Abstand (2P je Teilaufgabe)

(a) Sei X ein metrischer Raum, $A \subset X$ und $x \in X \setminus A$ ein Punkt mit

$$\text{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\} = 0.$$

Zeigen Sie, dass x ein Randpunkt von A ist.

(b) Geben Sie einen metrischen Raum X mit Metrik d , eine Menge $A \subset X$ sowie einen Punkt $x \in X \setminus A$ an, so dass $d(x, A) = 0$.

3) Abstand und oszillierende Funktionen. (4P)

Es sei

$$A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 10], y = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]) .$$

Beweisen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ gilt: $\text{dist}(z, A) > 0$.

4) Stetige Funktionen zwischen metrischen Räumen. (4P)

Es sei $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ die Einheitskreislinie und $M := S^1 \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Weiterhin sei $N := S^2 := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$ die Einheitskugel in \mathbb{R}^3 . Auf M und N seien die Abbildungen d_M und d_N definiert durch

$$\begin{aligned}d_M(((x, y), \varphi), ((x', y'), \varphi')) &:= \|(x, y) - (x', y')\|_{\mathbb{R}^2} + |\varphi - \varphi'| \\d_N((a, b, c), (a', b', c')) &:= \|(a, b, c) - (a', b', c')\|_{\mathbb{R}^3}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

- (a) (M, d_M) und (N, d_N) sind kompakte metrische Räume und abgeschlossene Teilmengen des \mathbb{R}^3 .
- (b) Die Abbildung

$$f : M \rightarrow N, \quad ((x, y), \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} x \cos \varphi \\ y \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

ist stetig als Abbildung zwischen den metrischen Räumen (M, d_M) und (N, d_N) .

- (c) f ist surjektiv aber nicht injektiv.

Abgabe am 7.05.2014 um 10:00 in den Briefkästen im Foyer des Audimax.

Aktuelle Übungsblätter finden Sie auf der Homepage.