Übungsblatt 5 7.05.2014

Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2014

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Heida

1) Distanz und Durchmesser für kompakte Mengen (2P je Teilaufgabe)

(a) Für zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf_{a\in A,\, b\in B} \|a - b\| .$$

Zeigen Sie: Sind $A, B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, dann gibt es $a \in A$ und $b \in B$ so dass $\operatorname{dist}(A, B) = \|a - b\|$.

(b) Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so gibt es $a, \hat{a} \in A$ mit $\operatorname{diam}(A) = \|a - \hat{a}\|$.

2) Realteil und Imaginärteil komplexer Zahlen. (5P)

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

$$(i) \quad (2+i)^3 , \qquad (ii) \quad \frac{1+3i}{2-i} , \qquad (iii) \quad \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 .$$

(b) Bestimmen und skizzieren Sie jeweils die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit

$$(i) \quad |z - 2i| + |z + 2i| < 4 , \qquad (ii) \quad \operatorname{Im} z^2 = 0 .$$

3) Additionstheoreme. (4P)

Die Funktionen Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus werden im Komplexen definiert durch

$$\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \qquad \sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

Beweisen Sie die Additionstheoreme

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2,$$
$$\sinh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \sinh z_2 + \sinh z_1 \cosh z_2$$

für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

4) Die totale Ableitung einer Funktion. (4P)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \sin x_2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 + \sin x_2 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der totalen Ableitung, dass $Df(0)$ gegeben ist durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Abgabe am 14.05.2014 um 10:00 in den Briefkästen im Foyer des Audimax.

Aktuelle Übungsblätter finden Sie auf der Homepage.