Übungsblatt 7 21.05.2014

Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2014

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Heida

1) Differenzierbarkeit. (4P)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f (total) differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ ist.

2) Richtungsableitungen. (2P je Teilaufgabe)

Es sei

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f nicht stetig in $(0,0)$ ist.

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0,0)$ in jeder Richtung $(\nu_1,\nu_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\nu\|_2 = \sqrt{\nu_1^2+\nu_2^2} = 1$.

(c) Sei $x_0 = (1,1)$. Berechnen Sie $\max\left\{\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0) : \|\nu\|_2 = 1\right\}$.

3) Partielle Ableitungen. (4P)

Zeigen Sie, dass es keine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^2 \quad \text{für alle } x,y \in \mathbb{R}.$$

4) Vertauschbarkeit partieller Ableitungen. (4P)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{falls}(x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls}(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar ist, aber $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0,0)$.

Abgabe am 28.05.2014 um 10:00 in den Briefkästen im Foyer des Audimax.

Aktuelle Übungsblätter finden Sie auf der Homepage.