

Übungen zur Vorlesung  
**Analysis II**  
 Sommersemester 2014

Prof. Dr. B. Schweizer

Dr. M. Heida

1) Umkehrabbildung. (2P je Teilaufgabe)

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$f(x, y) = (e^{\sin x} - \cos x, \cos(x + y)).$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $f$  nicht injektiv auf  $\mathbb{R}^2$  ist.
- (b) Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^2$  von  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  gibt, so dass  $f$  auf  $U$  injektiv und  $V := f(U)$  offen ist.
- (c) Berechnen Sie für  $f^{-1} : V \rightarrow U$  aus (b) die Ableitung an der Stelle  $(e, 0)$ .

2) Eindimensionales Beispiel. (2P je Teilaufgabe)

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Ableitung  $f'$  auf dem Intervall  $(-1, 1)$  beschränkt ist.
- (b) Zeigen Sie, dass  $f$  in keiner Umgebung von 0 injektiv ist. Warum ist dies kein Widerspruch zum Satz über die Umkehrabbildung ?

3) Invertierbarkeit. (2P je Teilaufgabe)

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch  $f(x, y) := (e^x \cos y, e^x \sin y)$ .

- (a) Bestimmen Sie das Bild  $f(\mathbb{R}^2)$ .
- (b) In welchen Punkten  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ist die Funktionalmatrix  $Df(x, y)$  invertierbar?
- (c) Ist die Abbildung  $f$  global injektiv ?
- (d) Bestimmen Sie die Bilder von Geraden, die parallel zu den Koordinatenachsen sind, unter der Abbildung  $f$ .

4) Taylorentwicklung und implizite Funktionen. (4P)

Durch die Gleichung

$$x^4 + x^2 \cdot y + y^4 = 1$$

wird in einer Umgebung des Punktes  $(1, 0)$  implizit eine Funktion  $y = f(x)$  definiert. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung an der Entwicklungsstelle  $x_0 = 1$  für diese Funktion  $f$ .

---

---

Abgabe am 18.06.2014 um 10:00 in den Briefkästen im Foyer des Audimax.

Aktuelle Übungsblätter finden Sie auf der Homepage.