

Übungen zur Vorlesung
Analysis II
Sommersemester 2014

Prof. Dr. B. Schweizer

Dr. M. Heida

1) Homöomorphismus und Banachscher Fixpunktsatz. (4P)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $f : X \rightarrow X$ eine Kontraktion. Beweisen Sie, dass die Abbildung $F : X \rightarrow X$, $F(x) := x + f(x)$ ein Homöomorphismus ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $g_y : X \rightarrow X$, $g_y(x) := y - f(x)$, $y \in X$ fest, und wenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz an.

2) Untermannigfaltigkeit mit globaler Darstellung. (4P)

Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x, y, z) := x^2 + xy - y - z, \quad g(x, y, z) := 2x^2 + 3xy - 2y - 3z.$$

Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0\}$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 ist mit der Parameterdarstellung

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(t) := (t, t^2, t^3).$$

3) Untermannigfaltigkeiten in \mathbb{R}^4 . (4P)

Die Funktionen $h_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, seien definiert durch

$$\begin{aligned} h_1(x_1, \dots, x_4) &= x_1x_3 - x_2^2, \\ h_2(x_1, \dots, x_4) &= x_2x_4 - x_3^2, \\ h_3(x_1, \dots, x_4) &= x_1x_4 - x_2x_3. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$M := \{x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} : h_1(x) = h_2(x) = h_3(x) = 0\}$$

eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^4 ist.

Abgabe am 25.06.2014 um 10:00 in den Briefkästen im Foyer des Audimax.

Aktuelle Übungsblätter finden Sie auf der Homepage.