

Übungen zur Vorlesung  
**Analysis II**  
 Sommersemester 2014

Prof. Dr. B. Schweizer

Dr. M. Heida

1) Parameterabhängige Integrale. (2P je Teilaufgabe)

(a) Die Funktion  $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{y}{x^2} e^{-\frac{y}{x}}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist die Funktion  $F(x) := \int_0^1 f(x, y) dy$  stetig in  $[0, 1]$ ?

Warum ergibt sich kein Widerspruch zum entsprechenden Satz der Vorlesung?

(b) Die Funktion  $f : (-1, 1) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}}, & \text{falls } y > 0, \\ 0, & \text{falls } y = 0. \end{cases}$$

Ist die Funktion  $F(x) := \int_0^1 f(x, y) dy$  differenzierbar in  $x = 0$ ?

Ist die Reihenfolge von Integration und Differentiation vertauschbar? Warum ergibt sich kein Widerspruch zum entsprechenden Satz der Vorlesung?

2) Berechnung eines Integrals. (4P)

Zeigen Sie:  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ .

Betrachten Sie dazu das Integral  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$  für  $t \in \mathbb{R}$  und verwenden Sie, dass die

Funktion  $F(t) = \arctan(t)$  eine Stammfunktion von  $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$  ist.

3) Berechnung des Volumens einer Kugel. (4P)

Es sei

$$\text{Vol} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{Vol}(r) := 2 \int_{-r}^r \int_{-r}^r f(x, y) \, dx \, dy$$

mit

$$f(x, y) := \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} & \text{für } x^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie  $\int_{-r}^r f(x, y) \, dx = \frac{\pi}{2}(r^2 - y^2)$ .

b) Berechnen Sie  $\text{Vol}(r)$

3) Lineare Differentialgleichungen.

Bestimmen Sie zu beliebigem  $y_0 = y(0)$  und  $y_1 = y'(0)$  die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Verwenden Sie dazu zunächst den Ansatz  $y(t) = e^{\lambda t}$  und bestimmen Sie damit den Exponenten  $\lambda$ . Eine weitere (linear unabhängige) Lösung findet sich dann durch  $y(t) = te^{\lambda t}$ .

---

---

Abgabe am 9.07.2014 um 10:00 in den Briefkästen im Foyer des Audimax.

Aktuelle Übungsblätter finden Sie auf der Homepage.