Globalübung, 18.06.2014

Sei $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $Z = \mathbb{R}^m$.

Sei $U \subset X \times Y$; $(x_0, y_0) \in U$ & $f: U \to Z$.

Es gelte:

1. $f(x_0, y_0) = 0$
2. $D_y f$ existiert; $f, D_y f$ sind stetig
3. $D_y f(x_0, y_0)$ ist invertierbar

$\Longrightarrow$ Es gibt $u: B_\delta(x_0) \to Y$ sd.

$u(x_0) = y_0$ & $f(x, u(x)) = 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0)$

<u>Definition</u>

Sei $T \subset \mathbb{R}^k$ offene Menge

$\varphi: T \to \mathbb{R}^n$, $(t_1, t_2, \dots, t_k) \longmapsto \varphi(t_1, t_2, \dots, t_k)$

sei stetig diffbar.

φ heißt Immersion, wenn $\text{rang}(D\varphi(t)) = k \quad \forall t \in T$

Satz Für $M \subset \mathbb{R}^n$ sind äquiv.:

0. M ist Mannigfaltigkeit $\boxed{\text{dim } k}$
1. $\forall a \in M \ \exists$ Umg. $U \subset \mathbb{R}^n$ und Immersion $\varphi: T \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, sd. $\varphi(T) = M \cap U$ ist Homöom.
2. $\forall a \in M \ \exists$ Umg. U und $f: U \to \mathbb{R}^{n-k}$ stetig diffbar, sd. $M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$ und Rang $Df(x) = n-k \quad \forall x \in U$.

Satz über implizite Fkt.'en

Sei $f: \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar f

und sei für $c \in \mathbb{R}^m$

$N_c := \{x \in \mathbb{R}^{n \times m} \mid f(x) = c\}$ (Niveau-Menge zu $c \in \mathbb{R}^m$)

Falls $\text{rang } Df(x) = m \quad \forall x \in N_c$

So ist N_c eine n-dim. Mannigfaltigkeit.
Dies gilt vor allem für $N_0 := \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) = 0\}$

__Beispiel:__

1. $$f(x_1,x_2,y) = \left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$f(x_1,x_2,y) = 0$

$(x_1 - 1) + x_2 + y = 0$

$y = 1 - x_1 - x_2$ ist eine Fläche im $\mathbb{R}^3$

2. $f(x_1,x_2,y) = x_1^2 + x_2^2 + y^2 - 1$

$f(x_1,x_2,y) = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$

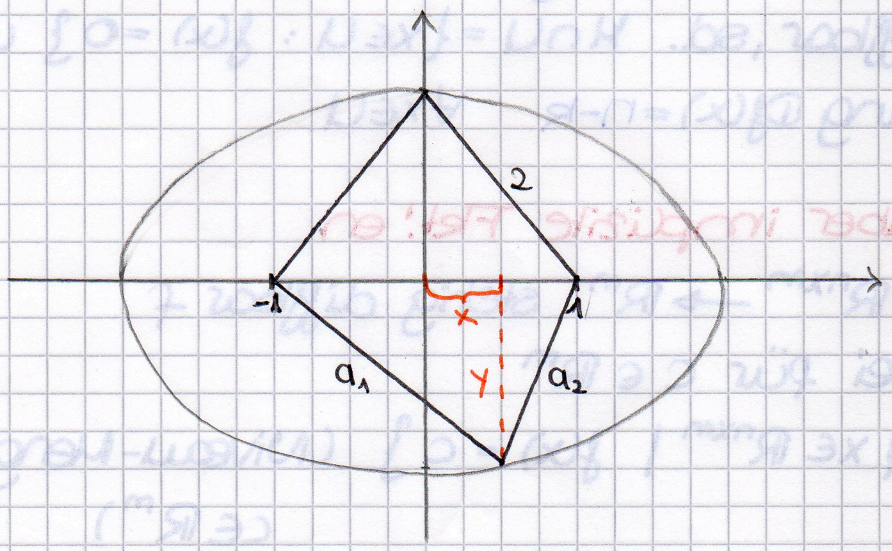
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\y\end{pmatrix} = r \begin{pmatrix}\cos\varphi \sin\vartheta\\ \sin\varphi \sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix} =: g(r,\varphi,\vartheta)$$

$f(g(r,\varphi,\vartheta)) = 0 \Leftrightarrow r^2 = 1$

$\Rightarrow N_0 =$ „Kugel um 0 mit Radius 1"

3. $f(x,y) := \left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right\| - 4$

$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right\| = 4$



$4 = a_1 + a_2$

$a_1^2 = y^2 + (1+x)^2$

$a_2^2 = y^2 + (1-x)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

$f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0$

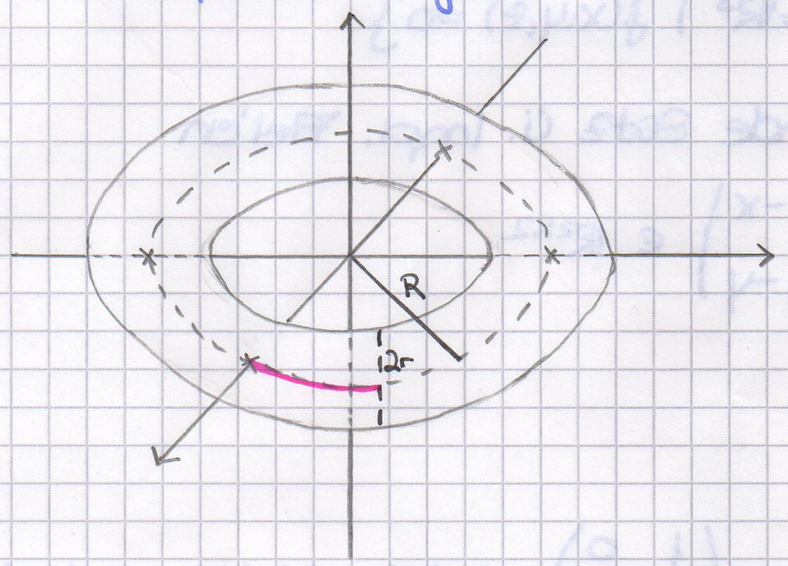
Parametrisierung:

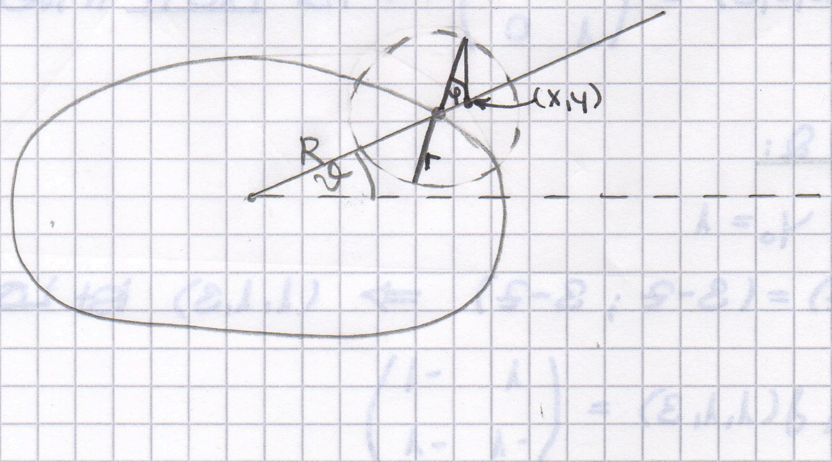
$g: [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi \longmapsto \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ \sqrt{3}\sin\varphi \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f(g(\varphi)) = 0 \quad \forall \varphi$

Problem:

- „einfache" Flächen führen zu „einfachen" f
- leicht komplexere Flächen führen zu viel komplexeren f





$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (R + r\cos\varphi) \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Parametrisierung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + r^2 + 2Rr\cos\varphi$$
$$= R^2 + r^2 + 2Rr\left(\pm\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}\right)$$

Implizite Darstellung

Bsp. 5: von implizit zur Parameter-Darstellung

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^3 + y + x - xz \\ x^2 y + x^3 + y - yz \end{pmatrix}$$

Bestimme Lösungsmenge

$$N_0 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0 \}$$

Idee: verwende Satz ü. Impl. Fkt'en

$$D_{yz} f = \begin{pmatrix} 1 ; & -x \\ x^2 + 1 ; & -y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Versuch 1:

$$f(0,0,0) = 0$$

$$D_{yz} f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{ist } \underline{\text{nicht}} \text{ invertierbar!}$$

Versuch 2:

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1$$

$$f(1,1,z) = (3 - z ; 3 - z) \Rightarrow (1,1,3) \text{ ist Lösung}$$

$$D_{yz} f(1,1,3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow N_0$ ist in Nähe zu $(1,1,3)$ eine 1-dim. Mgf

(Impl. Fkt.)

Suche Parametrisierung von N_0

$$f(x,y,z)=0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{ll} x^3+y+x-xz=0 & |\cdot y \\ x^2y+x^3+y-yz=0 & |\cdot x \end{array}\right\}\oplus$$

$$x^4-y^2=0 \Leftrightarrow y=\pm x^2$$

$$\Rightarrow z=x^2\pm x+1$$

D.h. es gibt zwei Param.

$$x\mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ x^2+x+1 \end{pmatrix}}_{g_1(x)} \; ; \quad x\mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ -x^2 \\ x^2-x+1 \end{pmatrix}}_{g_2(x)}$$

$$g_1(x)=g_2(x)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im Schnittpunkt von g_1 & g_2 gilt:

D_{yz} ist nicht invbar !