

Übungen zur Vorlesung  
**Analysis II**  
Sommersemester 2014

Prof. Dr. B. Schweizer

Dr. M. Heida

1) Metrische Räume.

(a) Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die Abbildung  $\delta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\delta(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$  ebenfalls eine Metrik auf  $X$  ist.

(b) Sei  $X$  eine beliebige Menge. Durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y, \end{cases}$$

wird die triviale Metrik auf  $X$  definiert. Zeigen Sie, dass jede Teilmenge von  $X$  bzgl. dieser Metrik zugleich offen und abgeschlossen ist.

2) Normen auf  $\mathbb{R}^2$ .

(a) Wird durch die Abbildung  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \|(x, y)\| := \sqrt{x^2 - xy + y^2} \in \mathbb{R}$  eine Norm auf  $\mathbb{R}^2$  definiert?

(b) Gilt für alle Normen auf  $\mathbb{R}^2$  die Ungleichung  $\|(x, y)\| \leq \|( |x|, |y| )\|$  ?

3) Metrik der französischen Eisenbahn.

(a) Zeigen Sie, dass im Raum  $\mathbb{R}^n$  durch

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{falls ein } a > 0 \text{ existiert mit } x = ay, \\ |x| + |y|, & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Metrik definiert wird. Hierbei bezeichnet  $|\cdot|$  die euklidische Norm im  $\mathbb{R}^n$ .

(b) Gibt es eine Norm  $\|\cdot\|$ , so dass  $d(x, y) = \|x - y\|$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  ?

4) Satz von Pythagoras und Schwarzsche Ungleichung.

Sei  $X$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , symmetrisch und linear in beiden Argumenten, die Norm sei  $\|x\|^2 := \langle x, x \rangle$ . Zwei Vektoren  $x$  und  $y$  heißen orthogonal, falls  $\langle x, y \rangle = 0$ .

(a) Zeigen Sie:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \text{ für alle orthogonalen Vektoren } x, y \in X.$$

(b) Zeigen Sie: Für  $x, y \in X$  gilt die Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn  $x, y$  linear abhängig sind.

(*Anleitung:* Berechnen Sie  $\|x - \lambda y\|^2$  und wählen Sie dann ein geeignetes  $\lambda \in \mathbb{R}$ .)

---

---

Abgabe am 16.04.2014 um 11:00 in den Briefkästen im Foyer des Audimax.

Aktuelle Übungsblätter finden Sie auf der Homepage.