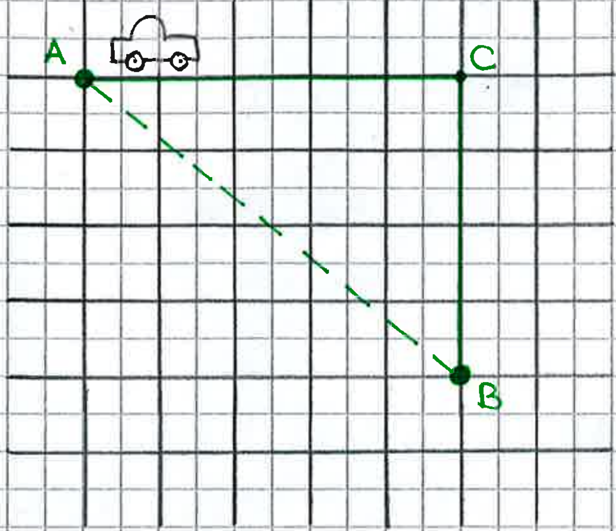
# Globalübung, 15.04.2014

## Inhalt Analysis II

### 1. Metrische Räume (& Topologie)

– Warum?

- Abstandsbegriff
- Bsp: Manhattan Metrik



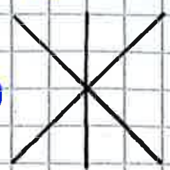

$d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$

bzw. Def. von $d(\cdot,\cdot)$ auf $\mathbb{R}^2$ (bzw. auf $\mathbb{Z}^2$).

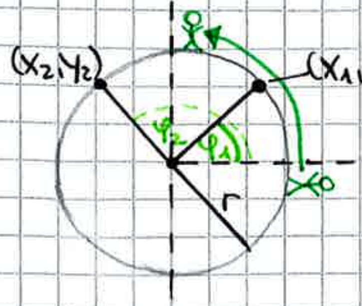
$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$\neq \sqrt{|x_1 - y_2|^2 + |x_2 - y_2|^2}$$

Bem: $d(\cdot,\cdot)$ wird nicht durch $\|\cdot\|_2$ erzeugt

- Bsp: Nur Bewegungen in Richtung  sind erlaubt.

• Bsp:




Abstand: Ordne $(x,y)$ den Winkel $\varphi$ zu

dann $d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) := r \cdot |\varphi_1 - \varphi_2|$

• Abstände zwischen Funktionen:

Bsp (aus Vorl.) $C[a,b]$ mit $\|\cdot\|_{sup}$ ist Norm. VR.

• Wieso Abstände zwischen Fkt.en?

In komplexen Problemen sind Lös. komplexe Objekte

z.B.: „Finde Funktion $f: [0,T] \times [a,b] \to \mathbb{R}$

$(t,x) \longrightarrow f(t,x)$

mit $\frac{d}{dt} f(t,x) = \frac{d^2}{dx^2} f(t,x) + g(t,x)$"

Computerlösungen führen zu der Frage:

„Wie nahe ist die C-Lös. an den echten Lös.?" ⇝ Abstand!

Lösungen können auch Mengen odere andere Objekte sein

- Gibt es Norm auf $C(\mathbb{R})$? – Nein!
  Aber es gibt eine Metrik

## 2. Differenzierbarkeit

In $\mathbb{R}$: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ diffbar in $x_0\in(a,b)$
$\Leftrightarrow \exists\, c\in\mathbb{R}$ s.d. $c=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$\Leftrightarrow f(x_0+h)=f(x_0)+ch+\varphi(h)$

mit $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|\varphi(h)|}{h}=0$

! In $\mathbb{R}^n$: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ diffbar in $x_0\in\mathbb{R}^n$
$\Leftrightarrow \exists\, A\in\mathbb{R}^{n\times m}$: $f(x_0+h)=f(x_0)+Ah+\varphi(h)$

mit $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\dfrac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|}=0$

- Kettenregel? • Umkehrfunktion?
- Länge von Kurven?

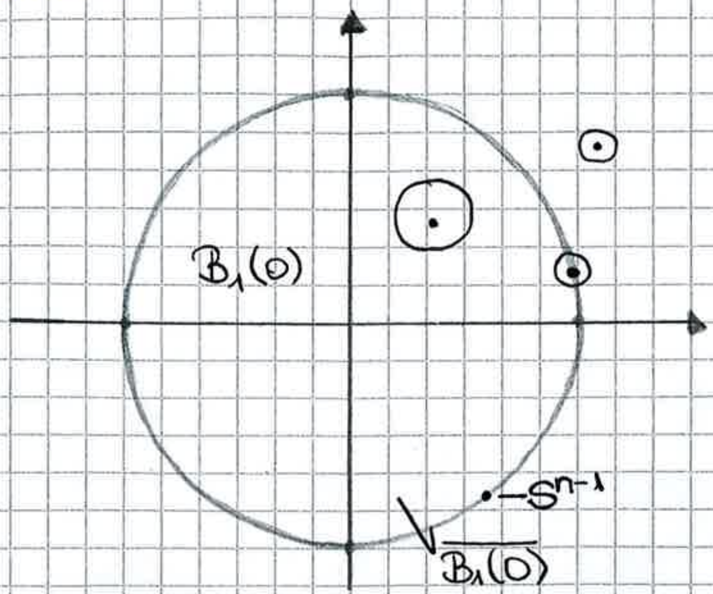
## Beispiele rund um $\mathring{A}, \partial A, \bar{A}$

$X=\mathbb{R}^n \qquad A:=B_1(0)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|<1\}$

$\partial A=S^{n-1}:=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|=1\}$

$\bar{A}=\overline{B_1(0)}=\bar{B}_1(0)=\{x\in\mathbb{R} \mid \|x\|\leq 1\}$

# Skizze




## Beweis ($\partial A = S^{n-1}$)

zu zeigen: $\forall x \in S^{n-1} : \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$

$B_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$

Sei also $x \in S^{n-1}$, d.h. $\|x\| = 1$.

Schreibe $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

OBdA $x_1 > 0$. Dann gilt $\forall\ \varepsilon > 0$ und

$\tilde{x} := (x_1 + \varepsilon, x_2, \dots, x_n)$ dass

$$\|\tilde{x}\|^2 = (x_1 + \varepsilon)^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2$$

$$= \|x\|^2 + \varepsilon^2 + 2x_1\varepsilon > \|x\|^2 = 1 \quad \Rightarrow \tilde{x} \notin A$$

definiere $\delta := \min\{x_1, \varepsilon\}$ und $\hat{x} := (x_1 - \delta, x_2, x_3, \dots, x_n\}$

dann: $$\|\hat{x}\|^2 = \underbrace{(x_1 - \delta)^2}_{0 \leq x_1 - \delta < x_1} + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2$$

$$< x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \underbrace{\|x\|^2}_{=1} \Rightarrow \hat{x} \in A$$

$\Rightarrow x \in \partial A$

nur gezeigt: $S^{n-1} \subseteq \partial A$

Sei $x \in A$, d.h. $\|x\| < 1$

Wähle $\varepsilon := \frac{1}{2}(1 - \|x\|)$ dann gilt für alle

$$y \in B_\varepsilon(x) := \|y\| = \|x + (y-x)\| \\ \leq \|x\| + \|y-x\| \\ \leq \|x\| + \varepsilon \\ = \|x\| + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\|x\| < 1$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| > 1$ und $\varepsilon := \frac{1}{2}(\|x\| - 1)$

Dann gilt $\forall\, y \in B_\varepsilon(x)$:

umgekehrte Δ-Ungleichung

$$\|y\| = \|x + (y-x)\| \geq \|x\| - \|y-x\| \\ \geq \|x\| - \varepsilon \\ = \|x\| - \frac{1}{2}\|x\| + \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{2}\|x\| + \frac{1}{2} > 1$$

D.h. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| < 1 \ \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus A) = \emptyset$

$\Rightarrow \forall x$ mit $\|x\| < 1 : x \notin \partial A$

$\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| > 1 \ \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$

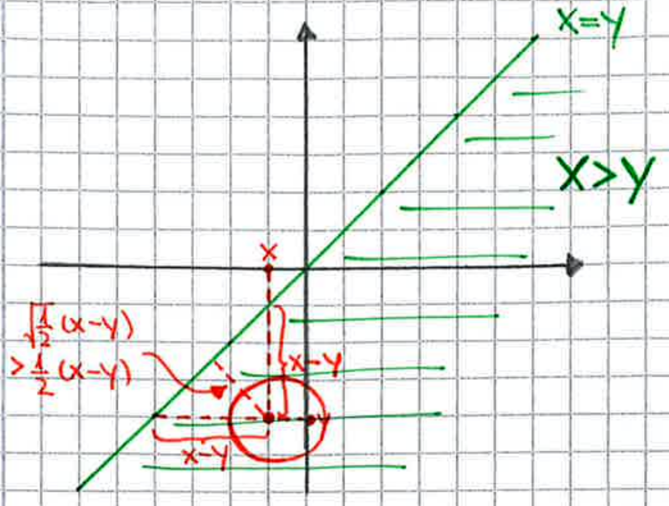
$\Rightarrow \forall x$ mit $\|x\| > 1 : x \notin \partial A$

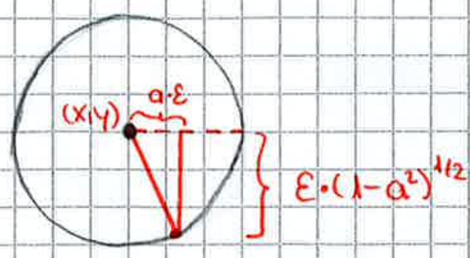
$\Rightarrow \forall x$ mit $\|x\| \neq 1 : x \notin \partial A$

$\Rightarrow \partial A = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$

■

**Bsp:** $X = \mathbb{R}^2 \quad A := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y \}$




**Beh:** $\partial A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \}$

**Bew:**

Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x = y$ und $\varepsilon > 0$ bel.
Wähle $\tilde{x} := (x + \frac{\varepsilon}{2}, y) \in B_\varepsilon\left(\binom{x}{y}\right)$ & $x + \frac{\varepsilon}{2} > y$

d.h. $(x + \frac{\varepsilon}{2}, y) \in A$

Da $(x,y) \notin A \Rightarrow B_\varepsilon((x,y)) \cap A \neq \emptyset$ &
$B_\varepsilon(x,y) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A) \neq \emptyset$

$\Rightarrow (x,y) \in \partial A$

Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > y$, d.h. $(x,y) \in A$
Sei $\varepsilon := \frac{1}{2}(x-y) > 0$ und $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in B_\varepsilon(x,y)$ bel.

Da $x > y$, ergibt sich die minimale Differenz aus $\tilde{x} - \tilde{y}$

$$\tilde{x} := x - a\varepsilon \ , \ \tilde{y} = y + (1-a^2)^{1/2} \cdot \varepsilon$$

Es gilt
$$\tilde{x} - \tilde{y} = x - a\varepsilon - y - (1-a^2)^{1/2}\varepsilon$$
$$= x - y - \underbrace{(a + (1-a^2)^{1/2})}_{<2}\varepsilon$$

$> x - y - 2\varepsilon = x - y - 2 \cdot \frac{1}{2}(x-y) = 0$

$\Rightarrow \tilde{x} > \tilde{y}$

$\Rightarrow (x,y) \notin \partial A$

Ebenso: $(x,y)$ mit $x < y$ nicht im Rand

$\Rightarrow \partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ ∎