2. Globalübung 07.05.2014

1. Komplexe Zahlen
2. Kompaktheit

---

1. Komplexe Zahlen

$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ wir schreiben für $z = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : z = x + iy$

Im Sinne der Linearen Algebra $A: z = x \underset{1}{\underset{\downarrow}{e_1}} + y \underset{i}{\underset{\downarrow}{e_2}}$

$\mathbb{C}$ ist ein Körper mit $(a+ib)+(x+iy) = (a+x) + i\cdot(b+y)$

<u>Produkt</u>: $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(a+ib)(x+iy) = (ax-by) + i(bx+ay)$

<u>Vereinfachung komplexer Ausdrücke</u>

1. <u>Beispiel</u>: Real- & Imaginärteil von

$$(3+4i)(5-i) = 15 - 3i + 20i \underbrace{-4i^2}_{+4}$$
$$= 19 + 17i$$

Realteil: 19 , Imaginärteil: 17

2. <u>Beispiel</u>:

$$\frac{2i-3}{1+i} \overset{\text{mit Komplexkonj. erweitert}}{=} \frac{(2i-3)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i-2i^2-3+3i}{1+i-i-i^2}$$
$$= \frac{5i-1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

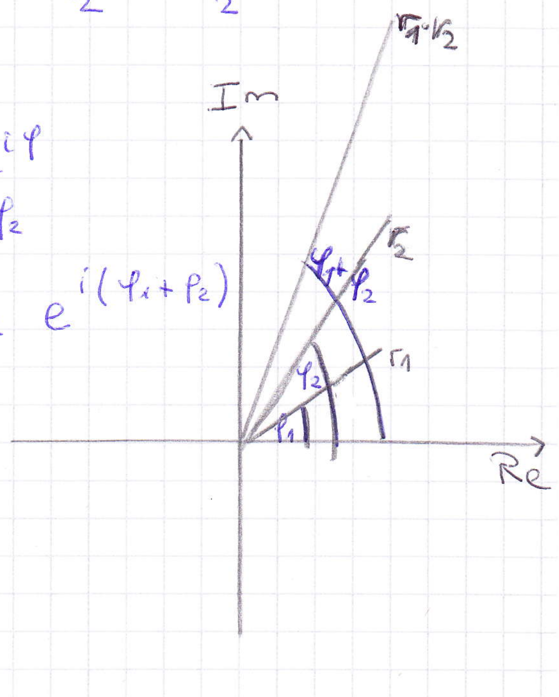
<u>Polarkoordinaten</u>:

$\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists r, \varphi \in \mathbb{R} \quad z = re^{i\varphi}$

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \qquad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

$z = re^{i\varphi} = r\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix}$



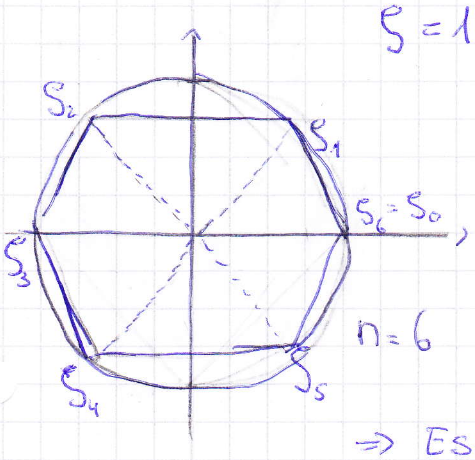
n-te Einheitswurzel:

$\zeta \in \mathbb{C}$ heißt n-te Einheitswurzel

falls $\zeta = 1$

Bestimme alle n-ten EW

$\zeta = r \cdot e^{i\varphi}$



$\zeta = 1 \iff r^n e^{in\varphi} = 1$

$\iff |r^n \cdot e^{in\varphi}| = 1 \wedge n\varphi = 2 \cdot \pi \cdot k$ für $k \in \mathbb{N}$

$\iff |r^n| \cdot \underbrace{|e^{in\varphi}|}_{=1 \text{ (da auf Einheitskreis)}} = 1 \wedge n\varphi = 2\pi k$

$\iff |r^n| = 1 \wedge \varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{k}{n}; k \in \mathbb{N}$

$\iff r = 1 \wedge \varphi = 2 \cdot \pi \cdot \frac{k}{n} \quad k \in \mathbb{N}$

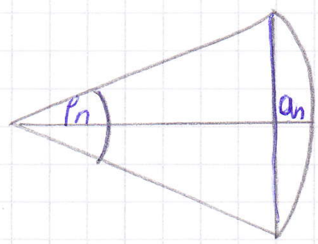
$\Rightarrow$ Es gibt genau n n-te EW

$1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{2 \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot i}, e^{3 \cdot \frac{2\pi}{n} i}, \ldots, e^{\frac{n-1}{n} \cdot 2\pi i}$

Umfang des regelmäßigen n-Ecks:

Sei a_n die Länge einer Kante $U_n = n \cdot a_n$

Innenwinkel: $\varphi_n = \frac{2\pi}{n}$



$a_n = 2 \cdot \sin \frac{\varphi_n}{2}$

$= 2 \cdot \sin \frac{\pi}{n}$

$\Rightarrow U_n = 2n \cdot \sin \frac{\pi}{n}$

Frage: $\lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} 2n \sin \frac{\pi}{n}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{2\pi}{\pi h} \sin(\pi h) \overset{\text{Ana I}}{=} 2\pi$

Sei $f: G \to \mathbb{C}$ stetige Funktion

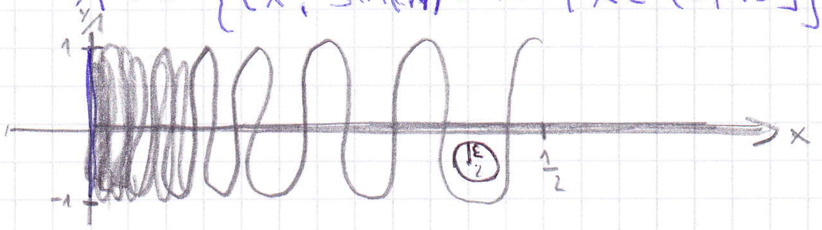
f heißt komplex diff'bar in $z_0 \in \mathbb{C}$

$\iff \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z}$ existiert

2. Kompaktheit

$A := \{(x, \sin(\tfrac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,10]\} \cup \{(0,y) \mid -1 \le y \le 1\}$

(Ordinate zugehörig)



z.z.: $\forall\, z = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus A : \operatorname{dist}(z, A) > 0$

Also: z.z.: $\mathbb{R}^2 \setminus A$ offen oder: A abg.

Klassisch: Für $z = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ finde $\varepsilon > 0 : B_\varepsilon(z) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$

Alternativ: Zeige A ist kompakt (da $A \subset \mathbb{R}^2$: folgenkompakt)

z.z.: Für jede Folge $(x_k, y_k) \subset A$ gibt es TF (x_{k_n}, y_{k_n}) und $(x,y) \in A$ s.d. $(x_{k_n}, y_{k_n}) \to (x,y)$ für $n \to \infty$

Beweis: Sei (x_k, y_k) Folge in A

Fall 1): Es gibt TF (x_{k_j}, y_{k_j}) s.d. $x_{k_j} = 0 \;\forall j$

da $(y_{k_j})_j \subset [-1,1]$ und $[-1,1]$ kompakt

$\Rightarrow \exists$ TF $y_{k_{j_i}}$ und $y \in [-1,1] : y_{k_{j_i}} \xrightarrow{i \to \infty} y$

$\Rightarrow (x_{k_{j_i}}, y_{k_{j_i}}) = (0, y_{k_{j_i}}) \to (0, y) \in A$

Fall 2): Da $0 \le x_k \le 10$ und $[0,10]$ komp

$\Rightarrow \exists$ TF x_{k_j} und $x \in [0,10]$:

O.E.: $x_{k_j} \neq 0$ und $x_{k_j} \to x$

Fall 2a): $x \neq 0$

$\Rightarrow y_{k_j} = \sin \frac{1}{x_{k_j}} \;\forall j \Rightarrow y_{k_j} \to \sin \frac{1}{x}$

$\Rightarrow (x_{k_j}, y_{k_j}) \to (x, \sin \frac{1}{x}) \in A$

Fall 2b): $x = 0$

Da $y_{k_j} \in [-1,1]$ kompakt $\Rightarrow \exists$ TF $y_{k_{j_i}} \to y \in [-1,1]$

$\Rightarrow (x_{k_{j_i}}, y_{k_{j_i}}) \to (x,y) = (0,y) \in A$

Fall 1 & 2 $\Rightarrow A$ kompakt

Alternativ: $\mathbb{R}^2 \setminus A$ offen

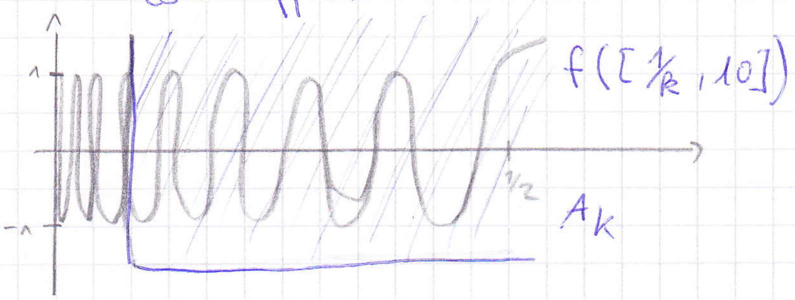
$f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^2 : x \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ \sin \frac{1}{x} \end{pmatrix}$

Für $k \in \mathbb{N}$ ist $[\frac{1}{k}, 10]$ komp $\Rightarrow f([\frac{1}{k}, 10])$ komp.

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus f([1/k, 10])$ ist offen

$\Rightarrow A_k := (\frac{1}{k}, 11) \times (-2, 2) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus f([1/k, 10]))$

ist offen



$A_k \cap A = \emptyset \quad \forall k$

$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = (0, 11) \times (-2, 2) \setminus f((0, 10])$

ist offen da alle A_k offen

$\Rightarrow A = [0, 10] \times [-1, 1] \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ ist abgeschlossen

Bzw: $B := \mathbb{R}^2 / \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A$ abg

$A = [0, 10] \times [-1, 1] \cap B$ abg.