

2. Klausur zur Analysis II – 22.9.2014

Prof. Dr. B. Schweizer

Dr. M. Heida

Aufgabe 1: (12P – Für die Teilaufgaben: a: 4P, b: 8P)

Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Der Raum $C([0, 1]; \mathbb{R})$ sei der Raum der stetigen Funktionen von $[0, 1]$ nach $\mathbb{R}$.

- a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (Ohne Begründung)
- (i) Ist f stetig auf einer kompakten Menge K , so nimmt $f|_K$ sein Maximum an.
 - (ii) Jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.
 - (iii) Ist f partiell differenzierbar, so ist f differenzierbar.
 - (iv) Ist f stetig und beschränkt, so nimmt f sein Minimum an.
 - (v) Ist f differenzierbar, so existieren alle Richtungsableitungen.
 - (vi) Ist f stetig, so sind alle Urbilder kompakter Mengen kompakt.
 - (vii) Ist f stetig, so sind Bilder kompakter Mengen kompakt.
 - (viii) Jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $C([0, 1]; \mathbb{R})$ ist kompakt.
- b) Geben Sie zu vier der obigen Aussagen ein Gegenbeispiel an (ohne Beweis).

Aufgabe 2: (10P – Für die Teilaufgaben: 6P, 4P)

- a) Auf $\mathbb{R}^n$ seien die Normen $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|$ und $\|x\|_\infty := \max_{k=1, \dots, n} |x_k|$ gegeben. Zeigen Sie, dass es Konstanten $a, b > 0$ gibt, so dass

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq b\|x\|_1.$$

Bestimmen Sie die optimalen Konstanten a und b .

- b) Gibt es eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ mit $\|x - y\| = 2$ für alle $x \neq y$? Gibt es eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ mit $d(x, y) = 2$ für alle $x \neq y$? Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 3: (10P – 5P je Teilaufgabe)

- a) Es sei $N := \mathbb{Q}^2 \cap [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Ist N offen? abgeschlossen? kompakt? Begründen Sie ihre Aussagen. Bestimmen Sie zusätzlich ∂N .
- b) Sei $X = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ und $M := \{f \in X \mid f(x) > 0 \forall x \in [0, 1]\}$. Zeigen Sie, dass M offen ist in X .

Aufgabe 4: (10P – Für die Teilaufgaben: a: 4P, b: 6P)

- a) Formulieren Sie den Banach'schen Fixpunktsatz.
- b) Welche der Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes sind erfüllt und welche sind verletzt bei den Funktionen

$$\begin{array}{ll} T_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & x \mapsto x + 1, \\ T_2 : (0, 1) \rightarrow (0, 1), & x \mapsto \frac{1}{2}x, \\ T_3 : [0, 1] \rightarrow [0, 1], & x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x & \text{für } x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} & \text{für } x > \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}$$

Aufgabe 5: (10P – 5P je Teilaufgabe)

- a) Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}}$ eine Cauchyfolge und sei $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}_{\geq 0}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}}$ so dass $x_{n_k} \rightarrow x$ für ein $x \in X$. Zeigen Sie: $x_n \rightarrow x$.
- b) Zeigen Sie: Jeder kompakte metrische Raum (X, d) ist vollständig.

Aufgabe 6: (8P – je 4P pro Teilaufgabe)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Funktion $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \sin(y + z) \\ \cos(x^2 + y^2 + z^2) \end{pmatrix}$.

- a) Berechnen Sie die Ableitung von $Df(x, y, z)$ im $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- b) Berechnen Sie in $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Richtungsableitung $D_v f(x, y, z)$ von f in Richtung des Vektors $v = (0, 1, 1)$.

Aufgabe 7: (10P – je 5P pro Teilaufgabe)

Sei $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0, xy < 2\pi\}$. Betrachten Sie die Abbildung

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (z \cos(xy), z \sin(xy), x).$$

- a) Berechnen Sie die Jacobideterminante $\det Df(x, y, z)$ für alle $(x, y, z) \in U$.
- b) Die Abbildung f ist injektiv, dies dürfen Sie voraussetzen. Begründen Sie, dass für $V = f(U)$ die Umkehrabbildung $g : V \rightarrow U$ differenzierbar ist. Berechnen Sie die Ableitung von g im Punkt $(-1, 0, \frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}, 2\pi, 1)$.

Aufgabe 8: (10P – je 5P pro Teilaufgabe)

- a) Sei E die Ellipse

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass E eine Mannigfaltigkeit ist.

- b) Bestimmen Sie das Maximum und Minimum der Funktion $f(x, y) = xy$ auf E .

Aufgabe 9: (10P – je 5P pro Teilaufgabe)

- a) Berechnen Sie die Länge $L(\alpha)$ des Weges $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\alpha(t) = (t \cos(t), t \sin(t))$. Tip: Zeigen Sie, dass $|\alpha'(t)| = \sqrt{1 + t^2}$ und verwenden Sie die Substitution $t = \sinh x$ sowie die Darstellung $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.
- b) Berechnen Sie das Wegintegral der Funktion $g(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ entlang α .

Aufgabe 10: (10P – je 5P pro Teilaufgabe)

- a) Bestimmen Sie die Lösung $z(t)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$z' = \frac{2t}{t^2 + 1} z, \quad z(0) = 1.$$

- b) Lösen Sie die Gleichung

$$y' = \frac{2t}{t^2 + 1} y + t^2 + 1, \quad y(0) = 2$$

mit dem Ansatz $y(t) = u(t) z(t)$, wobei $z(t)$ die Lösung aus Teil a) ist.