ANALYSIS II

Lösung der 1. Klausur vom 22/07 (von D. Reding)

Aufgabe 1

(a) Richtig sind die Aussagen (iii), (iv) und (vii).

(b) *Gegenbeispiel zu (i):*
$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto |x|$ ist stetig, aber nicht partiell differenzierbar nach x (s. Ana1)

Gegenbeispiel zu (ii):

$$f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f ist (wegen $f(h,0) = f(0,h) = 0$) partiell differenzierbar in $(0,0)$, aber unstetig dort (betrachte z.B. die Folge $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$).

Gegenbeispiel zu (v):
$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x$ ist stetig und unbeschränkt.

Gegenbeispiel zu (vi): Vgl. dazu Blatt 8 / Aufgabe 1:

$$f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} 1, & 0 < y < x^2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

f besitzt alle Richtungsableitungen in $(0,0)$, ist aber unstetig dort
(betrachte z.B. die Folge $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right)$).

Gegenbeispiel zu (viii):
$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x$ ist stetig differenzierbar und erfüllt für $G = \{(0,0)\}$:

$$\max_{x \in G} f(x) = f(0,0) =: f(x_1),$$

aber $\nabla f(x_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2

(a)

$$\begin{aligned}\|(1,2,3)-(3,2,1)\|_1 &= \|(-2,0,2)\|_1 = |-2|+|0|+|2| = 4\\ \|(1,2,3)-(3,2,1)\|_2 &= \|(-2,0,2)\|_2 = \sqrt{|-2|^2+|0|^2+|2|^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\\ \|(1,2,3)-(3,2,1)\|_\infty &= \|(-2,0,2)\|_\infty = \max\{|-2|,|0|,|2|\} = 2\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\|f-g\|_X &:= \|f-g\|_\infty = \sup_{x\in[0,2]}|f(x)-g(x)| = \sup_{x\in[0,2]}\left|x^2-(1-x)\right|\\ &= \sup_{x\in[0,2]}\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right| = \left(2+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4} = 5\end{aligned}$$

(c) Mit $f\equiv 0$ hat man

$$\begin{aligned}\|f_n-f\|_X &= \sup_{x\in[0,2]}|f_n(x)| = \sup_{x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]}|f_n(x)| \geq \max\{\sup_{x\in\left[0,\frac{1}{2n}\right]}|f_n(x)|, \sup_{x\in\left[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}\right]}|f_n(x)|\}\\ &= \max\{\sup_{x\in\left[0,\frac{1}{2n}\right]}|2nx|, \sup_{x\in\left[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}\right]}|2-2nx|\} = \max\{1,1\} = 1\end{aligned}$$

Folglich $f_n \not\longrightarrow f$ bzgl. $\|\cdot\|_X$.

Für ein $g\in C^0([0,2],\mathbb{R})$ mit $g\not\equiv 0$ wähle $x_0\in(0,2]$ mit $g(x_0)\neq 0$. Fixiere $N\in\mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N}<x_0$. Dann hat man für alle $n\geq N$

$$\|f_n-g\|_X = \sup_{x\in[0,2]}|f_n(x)-g(x)| \geq \left|\underbrace{f_n(x_0)}_{=0}-g(x_0)\right| = \underbrace{|g(x_0)|}_{>0} \not\longrightarrow 0$$

Folglich konvergiert f_n in $(X,\|\cdot\|_X)$ nicht.

Alternativ: Zeige $(f_n)\subset X$ ist keine Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_X$.

Aufgabe 3

(a) Satz von Heine-Borel: In $\mathbb{R}^n$ (mit der euklidischen Norm $\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$) ist eine Teilmenge A genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. Nun ist $A := [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ unbeschränkt, da $(x_n) \subset A$ mit $x_n = n \longrightarrow \infty$. Nach Heine-Borel für $(\mathbb{R}, \|.\|_2)$ ist A nicht kompakt. (Bemerkung: A ist in der Tat abgeschlossen!)

(b) Betrachte $\mathbb{R}$ als metrischen Raum mit der euklidischen Metrik $d(x, y) := |x - y|$. Im metrischen Raum: Kompaktheit $\Leftrightarrow$ Folgenkompaktheit; zu zeigen ist also, dass eine Folge in $A = [0, \infty)$ existiert, die keine in A konvergente Teilfolge besitzt:
Betrachte erneut die Folge $x_n = n$ in A. Diese besitzt keine konvergente Teilfolge, da jede Teilfolge $x_{n_j} = n_j$ unbeschränkt ist.

Alternativ:
Betrachte $\mathbb{R}$ als topologischen Raum mit der Standardtopologie (von der obigen Metrik induziert). Im topologischen Raum: Kompaktheit $\Leftrightarrow$ Überdeckungskompaktheit; zu zeigen ist also, dass eine offene Überdeckung von $A = [0, \infty)$ existiert, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt:
Betrachte dazu die offenen Intervalle $U_n = (-1, n) \subset \mathbb{R}$. Diese überdecken ganz A, da $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n = (-1, \infty)$, aber für endlich viele der U_n ist $\bigcup\limits_j U_{n_j} = (-1, N)$ mit $N = \max\limits_j \{n_j\}$. Es ist aber $A \not\subseteq (-1, N)$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

(c) Angenommen es existiert $f\colon\ [0, 1] \longrightarrow A$ stetig und surjektiv.
Das Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist kompakt nach Heine-Borel, da es beschränkt und abgeschlossen ist. Da f stetig ist, sind Bilder kompakter Mengen unter f wieder kompakt. Also ist $f([0, 1])$ kompakt. Nach Surjektivität von f hat man $f([0, 1]) = A$. Somit ist A kompakt. Dies widerspricht (a) und/oder (b).

Aufgabe 4

(a) Beachte: $x \in \mathbb{R}^n$ kritischer Punkt $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $\nabla f(x) = 0$

Es ist

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x)\sin(y)\exp(\cos(x)) \\ \cos(y)\exp(\cos(x)) \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn $z = 0$, $\cos(y) = 0$ und $\sin(x) = 0$ (da $\cos(y) = 0 \Rightarrow \sin(y) \neq 0$).

Die kritischen Punkte von f sind also gegeben durch

$$\left(m\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi, 0\right), \qquad n, m \in \mathbb{Z}$$

(b) Betrachte den Punkt $x_0 = \left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ $(n = m = 0)$. Für jedes $2\pi > \epsilon > 0$ hat man

$$f(x_0 + \epsilon(1,0,0)) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\exp(\underbrace{\cos(\epsilon)}_{<1}) + 0^2 < \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\exp(\cos(0)) + 0^2 = f(x_0)$$

$$f(x_0 + \epsilon(0,0,1) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\exp(\cos(0)) + \epsilon^2 > \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\exp(\cos(0)) + 0^2 = f(x_0)$$

Folglich existiert keine Umgebung von x_0, auf der f ein Extremum in x_0 besitzt.

Alternativ: Die Hesse-Matrix von f in $x_0 = \left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$

$$Hess(f)(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{1 \leq i,j \leq 3} = \begin{pmatrix} -e & 0 & 0 \\ 0 & -e & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

besitzt einen positiven als auch einen negativen Eigenwert, ist also indefinit. Folglich nimmt f in x_0 kein lokales Maximum/Minimum an.

Aufgabe 5

Es ist $F\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ total differenzierbar als Komposition von total differenzierbaren Funktionen, mit

$$F(x_0, y_0, z_0) = F\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

und der stetigen totalen Ableitung

$$DF(x, y, z) = (-(1 + y)\sin x + z, \cos x + e^z \cos y, e^z \sin y + x)$$

Insbesondere existieren die partiellen Ableitungen und sind stetig als Komposition von stetigen Funktionen. Weiterhin ist

$$D_z\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right) = e^z \sin y + x\big|_{\left(\frac{\pi}{2},0,0\right)} = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ und $V \subseteq \mathbb{R}$ von $z_0 = 0$ sowie eine (eindeutige) stetig differenzierbare Funktion $\varphi\colon\ U \longrightarrow V$ mit $\varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0$, so dass $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ für alle $(x, y) \in U$. Weiterhin gilt

$$D\varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -D_z\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right)^{-1} D_{(x,y)}\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1}(-1, 1) = \left(\frac{2}{\pi}, -\frac{2}{\pi}\right)$$

Aufgabe 6

(a) Ja, M_f ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ der Dimension 1 (eine Ellipse): Betrachte dazu die stetig differenzierbare Funktion $F(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2 - 1$. Es ist

$$M_f \overset{\text{Def}}{=} f^{-1}(0) \overset{!}{=} F^{-1}(0)$$

mit $RangDF(x_1, x_2) = Rang(2ax_1, 2bx_2) = 1$ auf der offenen Menge $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \supset M_f$. Folglich ist M_f eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ als Lösungsfläche einer C^1-Funktion auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ mit konstantem Rang, mit $\dim M_f = 2 - RangDF(x_1, x_2) = 2 - 1 = 1$.

(b) Nein, M_g ist keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$: Es ist $g(x_1, x_2) = 0$ genau dann, wenn $x_1 = 1$ oder $x_2 = -2$; folglich besteht M_g aus zwei sich kreuzenden Geraden in $\mathbb{R}^2$ mit Schnittpunkt in $(1, -2)$. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine hinreichend kleine Umgebung von $(1, -2)$. Betrachte das Kreuz $K := M_g \cap U$. Nun ist M_g keine 0-dim UMFK, da K nicht homöomorph zu einer 1-punktigen Menge ist (da K mehr als einen Punkt enthält). M_g ist keine 1-dim UMFK, da K nicht homöomorph zu einem offenen Interval $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ist (da $(K \backslash \{(1, -2)\}$ aus vier und $(a, b) \backslash \{x_0\}$ für alle $x_0 \in (a, b)$ aus zwei Komponenten besteht). M_g ist keine 2-dim UMFK, da K nicht homöomorph zu einer offenen Menge des $\mathbb{R}^2$ ist (da es selbst nicht offen ist).

(c) Da M_f eine 1-dim UMFK des $\mathbb{R}^2$ ist, hat man

$$T_x M_f = (N_x M_f)^\perp = Lin\left\{Df\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, 0\right)\right\}^\perp = Lin\{(2\sqrt{a}, 0)\}^\perp = Lin\{(0,1)\} = \{0\} \times \mathbb{R}$$

Da M_g lokal um $y = (1, 1) \in M_g$ eine vertikale Gerade ist, hat man

$$T_y M_g = Lin\{(0, 1)\} = \{0\} \times \mathbb{R}$$

Korrektur: Es ist der Punkt $z = (1, -2) \in M_g$ gemeint; in diesem Punkt ist der Tangentialraum nicht definiert, da M_g lokal um z keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 7

(a) Beachte den Hinweis:

$$\begin{aligned}
L(\alpha) &\overset{\text{Def}}{=} \int_0^1 \|D\alpha(t)\|_2\, dt = \int_0^1 \|(1, \cosh'(t))\|_2\, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\right]^2} dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{\left[\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\right]^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) dt = \left[\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e - e^{-1})
\end{aligned}$$

Alternativ verwende man direkt, dass $\cosh'(t) = \sinh(t)$ und $1 + \sinh(t)^2 = \cosh(t)^2$.

(b) Integriere partiell:

$$\begin{aligned}
\int x \cosh(x) dx &= \frac{1}{2}\int x(e^x + e^{-x}) dx = \frac{1}{2}x(e^x - e^{-x}) - \frac{1}{2}\int e^x - e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{2}x(e^x - e^{-x}) - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad [= x\sinh(x) - \cosh(x)]
\end{aligned}$$

(c) Verwende (a)+(b):

$$\begin{aligned}
\int_\alpha g &\overset{\text{Def}}{=} \int_0^1 g(\alpha(t))\, \|D\alpha(t)\|_2\, dt \overset{\text{s.o.}}{=} \int_0^1 t\cosh(t) dt = [t\sinh(t) - \cosh(t)]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}(e - e^{-1}) - \frac{1}{2}(e + e^{-1}) - \left[0 - \frac{1}{2}(e^0 + e^{-0})\right] = 1 - e^{-1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8

(a) Eine *gewöhnliche Differentialgleichung* mit Anfangsbedingung ist gegeben durch eine (offene) Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, ein Zeitintervall $[0,T)$ für ein $T > 0$, einen Anfangswert $y_0 \in U$ und eine parameterabhängige Funktion $f\colon U \times [0,T) \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

(b) Eine *Lösung* der Differentialgleichung in (a) ist eine (stetig) differenzierbare Funktion $y\colon [0,T) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $y(0) = y_0$ und $y'(t) = f(y(t),t)$ für alle $t \in [0,T)$.

Aufgabe 9

(a) Trenne Variablen und integriere:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} = z' = 3z \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{z}dz = 3dt \;\Rightarrow\; \int_0^t \frac{1}{z}dz = \int_0^t 3dt \\ &\Rightarrow \quad \ln z(t) - \ln \underbrace{z(0)}_{=1} = 3t \;\Rightarrow\; z(t) = e^{3t}\end{aligned}$$

(b) Für den Ansatz $y(t) = u(t)e^{3t}$ gilt

$$y'(t) = u'(t)e^{3t} + 3u(t)e^{3t}$$

und Einsetzen in die DGL

$$te^t = y' - 3y = (u'(t)e^{3t} + 3u(t)e^{3t}) - 3u(t)e^{3t} = u'(t)e^{3t}$$

liefert die neue DGL

$$u'(t) = te^{-2t}$$

Integration von 0 bis t liefert nun

$$u(t) - u(0) = \int_0^t u'(t)dt = \int_0^t te^{-2t}dt = \left[-\frac{1}{2}te^{-2t}\right]_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-2t}dt = -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}(e^{-2t} - 1)$$

Foglich ist mit $u(0) = y(t)e^{-3t}|_{t=0} = y(0) = 2$

$$u(t) = 2 - \frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}(e^{-2t} - 1) = \frac{1}{4}\left[9 - (2t+1)e^{-2t}\right]$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.