Auf jedem Blatt müssen Name und Platznummer eingetragen sein.

Name: Platznummer:	Korrekturvermerk ml

Aufgabe 1: Zusatzblätter

a) (i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi) (vii) (viii)

v f f f v f v f

b) (ii) $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ abg, nicht komp

(iii)

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x=0 \text{ oder } y=0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

(iv) $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$

(vi) $f(x) = 1$

(viii) $A := \{ f \in C([0,1]) \mid 0 \le f \le 1 \}$

Denn die Folge

$$f_n(x) := \begin{cases} 1-nx \,; & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

hat keine konv. TF

Auf jedem Blatt müssen Name und Platznummer eingetragen sein.

Name: Platznummer:	Korrekturvermerk

Aufgabe 2: Zusatzblätter

a) $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leq n \cdot \max_{k=1\dots n} |x_k| = n \cdot \|x\|_\infty$ 2

$\|x\|_\infty = \max_{k=1\dots n} |x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \|x\|_1$ 2

$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{n} \qquad b = 1$ 2

b) Ang $\|\cdot\|$ ex. :

Dann $\|2x\| = \|2x - 0\| = 2$

$\|2x\| = 2\|x\| = 2\|x-0\| = 2 \cdot 2$ ↯ 2

$d(x,y) := \begin{cases} 2 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$ ist metrik 1

$d(x,y) = d(y,x)$

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 1

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Auf jedem Blatt müssen Name und Platznummer eingetragen sein.

Name: Platznummer:	Korrekturvermerk

Aufgabe 3:

Zusatzblätter

a) N ist nicht offen $\frac{1}{2}$: sei $(x,y) \in N$, so gibt es $\forall \varepsilon > 0$

(*) ein $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mit $|x-r| < \varepsilon$ aber $(r,y) \notin N$ $\frac{1}{2}$

N nicht abgeschlossen $\frac{1}{2}$

z.B.: Sei $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \cap [0,1] \Rightarrow \exists\, x_n$ Folge in $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ s.d. $x_n \to r$

$(x_n, 0) \in N \;\forall n$ aber $(r,0) \notin N$. $\frac{1}{2}$

z.B.: Sei $(a,b) \in [0,1]^2\setminus\mathbb{Q}^2$. Dann: $\forall \varepsilon > 0\; \exists\, \tilde{a}, \tilde{b} \in [0,1]$

(**) s.d. $|a-\tilde{a}|^2 + |b-\tilde{b}|^2 < \varepsilon^2$

$\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \mathbb{Q}^2 \setminus N$ nicht offen!!

N nicht kompakt, da nicht abgeschlossen $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

(*), (**) $\Rightarrow [0,1]^2 \subset \partial N$ 1

$[0,1]^2$ abg $\Rightarrow [0,1] = \partial N$ 1

b) Sei $f \in M$ und $\varepsilon := \frac{1}{2}\left(\min_{x\in[0,1]} f(x)\right)$

2

Dann $\varepsilon > 0$ da sonst $f \notin M$ 1 (Da dann $f(x) = 0$ für ein $x \in [0,1]$)

Für $g \in B_\varepsilon(f)$ gilt $g(x) > f(x) - \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \forall x \in [0,1]$ 2

$\Rightarrow g \in M \Rightarrow M$ offen

Auf jedem Blatt müssen Name und Platznummer eingetragen sein.

Name: Platznummer:	Korrekturvermerk

Aufgabe 4:

Zusatzblätter

a) Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, sowie $f: A \to A$ eine Kontraktion, d.h. $\exists \lambda \in (0,1)$:

$$d(f(a), f(b)) \leq \lambda d(a,b) \qquad \forall a,b \in A$$

Dann hat f einen Fixpunkt.

b) $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen, vollständig.

1) $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen. T_1 ist keine Kontraktion, denn

$$|T_1(x) - T_1(y)| = |x-y|$$

2) $(0,1) \subset \mathbb{R}$ ist nicht abgeschlossen. $x \mapsto \frac{1}{2}x$ ist Kontraktion, da $|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y| = \frac{1}{2}|x-y|$

3) $[0,1]$ ist abgeschlossen, T_3 ist keine Kontraktion, da T_3 nicht stetig in $x_0 = \frac{1}{2}$

Auf jedem Blatt müssen Name und Platznummer eingetragen sein.

Name: Platznummer:	Korrekturvermerk

Aufgabe 5:

Zusatzblätter

a) Sei (X,d) metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in X. Sei $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, so dass $x_{n_k} \to x \in X$.

Sei $\varepsilon > 0$.

Dann gibt es $N_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n,m > N_0$: $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$

Da $x_{n_k} \to x$ gibt es $\tilde{k} \in \mathbb{N}$: $n_{\tilde{k}} > N_0$ und

$$d(x_{n_{\tilde{k}}}, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\Rightarrow \forall n > N_0$ gilt: ~~$d(x_n$~~

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_{\tilde{k}}}) + d(x_{n_{\tilde{k}}}, x)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow x_n \to x$.

b) Sei (X,d) kompakter Metrischer Raum.

$\Rightarrow (X,d)$ folgenkompakt

$\Rightarrow$ Jede Folge in X hat konvergente Teilfolge

$\Rightarrow$ Jede Cauchyfolge in X hat konvergente Teilfolge

$\overset{a)}{\Rightarrow}$ Jede Cauchyfolge in X konvergiert

$\Rightarrow (X,d)$ ist vollständig

Auf jedem Blatt müssen Name und Platznummer eingetragen sein.

Name: Platznummer:	Korrekturvermerk

Aufgabe 6:

Zusatzblätter

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin(y+z) & x\cos(y+z) & x\cos(y+z) \\ -2x\sin(x^2+y^2+z^2) & -2y\sin(\cdots) & -2z\sin(\cdots) \end{pmatrix}$$

$$D_v f(x,y,z) = Df(x,y,z)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\cos(y+z) \\ -2(y+z)\sin(\cdots) \end{pmatrix}$$

Auf jedem Blatt müssen Name und Platznummer eingetragen sein.

Name: Platznummer:	Korrekturvermerk

Aufgabe 7:

Zusatzblätter

a) Es gilt $Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} -zy\sin(xy) & -zx\sin(xy) & \cos(xy) \\ zy\cos(xy) & zx\cos(xy) & \sin(xy) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det Df(x,y,z) = -zx\sin^2(xy) - zx\cos^2(xy)$
$= -zx$

b) Es gilt $\det Df(x,y,z) = -zx \neq 0$ für alle $(x,y,z) \in U$

Da f stetig diffbar und injektiv folgt:

Die Umkehrabbildung $g: V \to U$ ist ebenfalls stetig diffbar. Für die Ableitung gilt

$$Dg(f(x,y,z)) = (Df(x,y,z))^{-1}$$

also: $Df(\frac{1}{2}, 2\pi, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2\pi & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

invertieren: $Df(\frac{1}{2}, 2\pi, 1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow$ $z = -a$, $x = c$

und: $-2\pi x - \frac{1}{2}y = b \Rightarrow y = -4\pi c - 2b$

$\Rightarrow Dg(-1, 0, \frac{1}{2}) = Df(\frac{1}{2}, 2\pi, 1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4\pi \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Auf jedem Blatt müssen Name und Platznummer eingetragen sein.

Name:	Korrekturvermerk
Platznummer:	

Aufgabe 8:

Zusatzblätter

a) E ist Nullstellenmenge der Funktion

$$\tilde{f}(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1$$

$Df(x,y) = \begin{pmatrix} x/2 \\ 2y \end{pmatrix}$ hat vollen Rang $\forall (x,y) \in E$

da für $(x,y) \in E$ gilt $x \neq 0$ oder $y \neq 0$

$\Rightarrow$ E ist UMFK

b)

E ist kompakt, also nimmt f auf E Max und Min an!

Lagrange für $F(x,y,\lambda) = xy - \lambda\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & y - \frac{1}{2}x\lambda = 0 \\ \text{II} & x - 2y\lambda = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y - \lambda^2 y = 0 \text{ und } x - \lambda^2 x = 0$$

$\Rightarrow \quad 1 - \lambda^2 = 0$ ~~oder~~ $x = y = 0$

aber: $x = y = 0$ $\lightning$ zu $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

$1 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$\Rightarrow x = \pm 2y \Rightarrow \frac{(2y)^2}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow$ mögliche Extrema in $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$; $\left(\sqrt{2}; -\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$; $\left(-\sqrt{2}; \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$ $\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$

$\Rightarrow$ Maxima in $\left(\sqrt{2}; \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$ und $\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$

Auf jedem Blatt müssen Name und Platznummer eingetragen sein.

Name: Platznummer:	Korrekturvermerk

Aufgabe 9:

Zusatzblätter

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \end{pmatrix}$$

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t}$$

$$= \sqrt{1+t^2}$$

$$L(\alpha) = \int_0^1 |\alpha'(t)| = \int_0^1 \sqrt{1+t^2} = \int_0^{\operatorname{arcsinh}(1)} \cosh^2 s\, ds$$

Entweder:

$$= \frac{1}{2}\cosh\sinh\Big|_0^{\operatorname{arcsinh}(1)} \underbrace{-\int \frac{1}{2}\sinh^2 + \int \frac{1}{2}\cosh^2}_{= \frac{1}{2}\int_0^{\cdots} 1\, ds}$$

$$= \frac{1}{2}\cosh \operatorname{arcsinh}(1) + \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(1)$$

oder:

$$= \int_0 \frac{1}{4}(e^s + e^{-s})^2 ds = \int_0^{\cdots} \frac{1}{4}(e^{2s} + e^{-2s} + 2)$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{2s} - e^{-2s} + 4s\right)\Big|_0^{\cdots}$$

b) $$\int_\alpha g = \int_0^1 g(\alpha(t))|\alpha'(t)|\, dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t + 1}}$$

$$= \int_0^1 1\, dt = 1$$

Auf jedem Blatt müssen Name und Platznummer eingetragen sein.

Name: Platznummer:	Korrekturvermerk

Aufgabe 10:

Zusatzblätter

a) $\frac{z'}{z} = \frac{2t}{t^2+1} \Rightarrow \cancel{\ln|z| = \ln(t^2+1)}$

$\Rightarrow \ln|z(t)| - \ln\underbrace{|z(0)|}_{=1} = \ln(t^2+1) - \ln 1$

$\Rightarrow \ln|z(t)| = \ln(t^2+1)$

$\Rightarrow |z(t)| = t^2+1 \Rightarrow z(t) = t^2+1$

b) $u'z + z'u = \frac{2t}{2t^2+1} uz + t^2+1$

$\Rightarrow u'(t^2+1) = t^2+1$

$\Rightarrow u' = 1 \Rightarrow u = t + c$

$y(0) = 1 + c \Rightarrow c = 2$

$\Rightarrow y(t) = (t^2+1)(t+2)$