Ana II - Klausur

Aufgabe 1

$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad x = (x_1, \dots, x_n)$

(a) (i) $\|x\|_1 = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} |x_k| = 0$

$\iff |x_k| = 0 \quad \forall\, k = 1, \dots, n$

$\iff x_k = 0 \quad \forall\, k = 1, \dots, n$

$\iff x = (0, \dots, 0)$

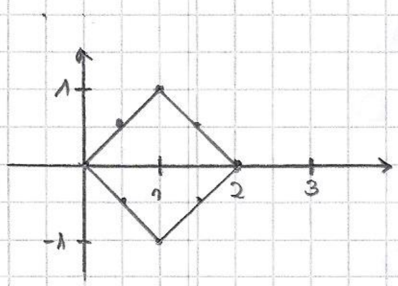
(ii) $\|\lambda x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k| = |\lambda| \cdot \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

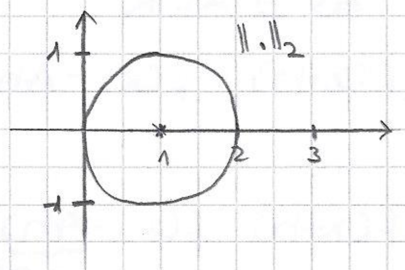
$= |\lambda| \cdot \|x\|_1$

(iii) $\|x+y\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|$

$\leq \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|) \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$

$\Rightarrow \|\cdot\|_1$ ist Norm





(b) $(X, \|.\|)$ norm. VR

$A := \{x \in X \mid \|x\| > 1\} \cup \{0\}$

$\partial A := \{x \in X \mid \|x\| = 1\} \cup \{0\}$

$\overline{A} := \{x \in X \mid \|x\| \geq 1\} \cup \{0\}$

<u>z.z.</u> $\partial B_1(0) \subset \overline{A}$

<u>Bew.:</u> Sei $x \in \partial B_1(0) \Rightarrow \|x\| = 1$

$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0: \ x \cdot (1 + \varepsilon/2) \in B_\varepsilon(x) \cap A$

$x \in B_\varepsilon(x) \setminus A$

$\Rightarrow x \in \partial A \quad \Rightarrow x \in \overline{A}$

<u>z.z.:</u> $0 \in \partial A$

<u>Bew.:</u> $\forall\, \varepsilon > 0: \ 0 \in B_\varepsilon(0) \cap A$

$\exists\, x \in B_\varepsilon(0)$ mit $x \neq 0$, dann aber: $x \notin A$

$\Rightarrow 0 \in \partial A$

$\square$

<u>Aufgabe 2</u>

(a) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & , 0 < x < y^2 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

f nicht stetig: wähle $y_k \to 0$ & $x_k := y_k^2$

$\Rightarrow f(x_k, y_k) = 1 \to 1 \neq f(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

(b) f diffbar $\Rightarrow \exists\, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s.d.

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|} (f(x+h) - f(x) - Ah) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} (f(x+h) - f(x) - \underbrace{Ah}_{\to 0}) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} (f(x+h) - f(x)) = 0 \qquad \Rightarrow f \text{ stetig}$$

(c) $f(x,y) = \sqrt{|y|}$

(d) $|h(x) - h(y)| = |g(f(x)) - g(f(y))|$

$\leq L_g \cdot |f(x) - f(y)|$

$\leq L_g \cdot L_f\, |x-y|$

$\square$

Aufgabe 3

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2 \sin x}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) f ist stetig:

$$\lim_{x,y \to 0} \frac{y^2 \sin x}{x^2+y^2} = \lim_{x,y \to 0} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \sin x$$

$$- \lim_{x,y \to 0} \frac{x^2 \sin x}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{x,y \to 0} \underbrace{\sin x}_{\to 0} - \lim_{x,y \to 0} \underbrace{\sin x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\in [0,1]} = 0$$

(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$

Aufgabe 4

$f(x) = Ax + \underbrace{x\,\Psi(x)}_{*}$ ist diffbar in 0. , $\Psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Überlege: Ang. Ψ diffbar

$$\Rightarrow Df(x) = A + \underbrace{\Psi(x)\, id + (a_{ij})_{ij}}_{\text{Ableitung von } *},$$

$$a_{ij} = x_i\, \partial_j \Psi(x)$$

Für $x=0$: $Df(0) = A + \Psi(0)\, id + 0$

Beh.: $Df(0) = A + \Psi(0)\, id$

Bew.: $\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|} \| f(h) - f(0) - (A + \Psi(0)\, id)h \|$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|} \| \cancel{Ah} + h\Psi(h) - \cancel{Ah} - h\Psi(0) \|$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\|h\|}{\|h\|} \cdot | \underbrace{\Psi(h) - \Psi(0)}_{\to 0} | = 0$$

$\square$

Aufgabe 5

Falls es solch ein f gäbe, dann

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2+6y \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = 2xy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2+4x \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 3y^2$$

$\Rightarrow$ f ist 2-mal st. diffbar

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

$$\Rightarrow 3y^2+4x = x^2+6y \quad \forall x,y \ ↯$$

Aufgabe 6

$f(x,y) := (y^2-1)\sin x$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} (y^2-1)\cos x \\ 2y\sin x \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \text{(i) } (y^2-1)\cos x = 0$$
$$\text{(ii) } 2y\sin x = 0$$

(i) $\Leftrightarrow (y^2-1) = 0 \vee \cos x = 0$

$\Leftrightarrow y = \pm 1 \vee x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{2}$

(ii) $\Leftrightarrow y = 0 \vee x = \pi k$

da (i) & (ii) gleichzeitig erfüllt sein müssen, gilt eine der Folgenden Situationen:

I $\quad y = \pm 1 \qquad x = \pi k$

II $\quad y = 0 \qquad x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{2}$

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -(y^2-1)\sin x & 2y\cos x \\ 2y\cos x & 2\sin x \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{I}: \; Df(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2\cos \pi k \\ \pm 2\cos \pi k & 0 \end{pmatrix}$$

Eig.V $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, EW: $\pm 2\cos \pi k$

Eig.V $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, EW: $\mp 2\cos \pi k$

Die Eigenwerte sind ungleich 0 und haben <u>immer</u> versch. Vorz.

$\Rightarrow$ kein lok. Extremum in Punkten $(\pi k, \pm 1)$

$$\mathrm{II}: \; Df(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(\pm\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & \sin(\pm\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ist pos. definit für $x = 2\pi k + \frac{\pi}{2}$

neg. definit für $x = 2\pi k - \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ f hat lokale Minima in $(2\pi k + \frac{\pi}{2}, 0)$

f hat lokale Maxima in $(2\pi k - \frac{\pi}{2}, 0)$

<u>Aufgabe 7</u>

$F(x,y,z) = 2z^7 + 4y^2 - 3xy + z + 2$

(Satz über implizite Funktionen anwenden)

$\frac{\partial F}{\partial x} = -3y \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 8y - 3x$

$\frac{\partial F}{\partial z} = 14z^6 + 1$

$F(2,1,0) = 0 + 4 - 6 + 0 + 2 = 0$

$\frac{\partial F}{\partial z}(2,1,0) = 1$

$F(x,y,z)$ & $DF(x,y,z)$ sind stetig

Daraus folgt mit Satz ü. impl. Fkt.:

Umg. U von $(2,1)$ und $\varphi: U \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(2,1)=0$

und $F(x,y,\varphi(x,y))=0 \quad \forall (x,y) \in U$

Es gilt:

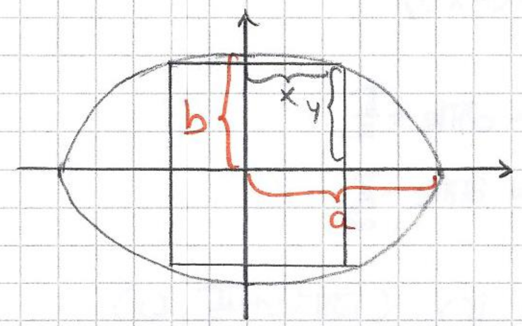
$$\nabla \varphi(x,y) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y)) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y)) \end{pmatrix} \left[\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \nabla \varphi(2,1) = -1^{-1}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 (nächste Woche)

Aufgabe 9

Zielfunktion:



$$F(x,y) = 4xy$$

Nebenbed.: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Notwendig für Max. (Lagrange)

$$4y - 2\lambda \frac{x}{a^2} = 0 \qquad |\cdot x$$

$$4x - 2\lambda \frac{x}{b^2} = 0 \qquad |\cdot y$$

$$0 = 8xy - 2\lambda \underbrace{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}_{=1} = 8xy - 2\lambda$$

$$\Rightarrow 2\lambda = 8xy$$

$$\Rightarrow \text{(i)} \quad 4y - 8x^2y \cdot \frac{1}{a^2} = 0 \iff 4y - 8y\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) = 0$$

$$\text{(ii)} \quad 4x - 8y^2x \cdot \frac{1}{b^2} = 0 \iff 4x - 8x\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = 0$$

(i) $\Leftrightarrow y = 0 \quad \vee \quad y^2 = \frac{1}{2} b^2$

(ii) $\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x^2 = \frac{1}{2} a^2$

Für $x=0$ oder $y=0 \Rightarrow F(x,y) = 0$

sicher kein Max.

Für $x = \frac{1}{\sqrt{2}} a \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} b \Rightarrow F(x,y) = -2ab$

$F(-\frac{1}{\sqrt{2}} a ; \frac{1}{\sqrt{2}} b) = -2ab$

$F(\frac{1}{\sqrt{2}} a, \frac{1}{\sqrt{2}} b) = F(-\frac{1}{\sqrt{2}} a, -\frac{1}{\sqrt{2}} b) = 2ab$

$\Rightarrow$ max. Fläche ist $2ab$