

Kontinuumsmechanik

Blatt 2

Abgabe am Montag, den 07.11.2016, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Lamé-Konstanten II: reine Zugbelastung).

Wir betrachten wieder den Elastizitätstensor $\mathbb{A}: \mathbb{R}_s^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_s^{n \times n}$ gegeben durch $e \mapsto 2\mu e + \lambda \operatorname{spur}(e) \operatorname{id}$. Zeigen Sie, dass sich $\mathbb{A}$ invertieren lässt mit der Gleichung

$$e = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma - \frac{\lambda}{2\mu + n\lambda} \operatorname{spur}(\sigma) \operatorname{id} \right).$$

Für $n = 3$ und $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ ist eine *reine Zugdeformation* gegeben durch $u(x) = \varepsilon x_1 e_1 + \delta x_2 e_2 + \delta x_3 e_3$ mit

$$\nabla^s u(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad \text{falls} \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ε und δ in Abhängigkeit von λ , μ und $\sigma_0 \in \mathbb{R}$. Stellen Sie die Verbindung zum Young'schen Elastizitätsmodul μ_Y her.

Bemerkung: Der Quotient $\nu := (-\delta)/\varepsilon$ heißt *Poissonzahl*. Er gibt das Verhältnis von lateraler Stauchung $(-\delta)$ zur Ausdehnung in Zugrichtung ε an.

Aufgabe 2 (Energiminimierung).

Sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Der Elastizitätstensor $\mathbb{A}$ sei symmetrisch. Zeigen Sie, dass sich die Lösung $u \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ der Elastizitätsgleichungen

$$-\nabla \cdot \sigma(x) = f(x), \quad \sigma(x) = \mathbb{A} \nabla^s u(x)$$

charakterisieren lässt als der Minimierer der Energie

$$\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla^s u : \mathbb{A} \nabla^s u - \int_{\Omega} f \cdot u.$$

(Bitte wenden)

Aufgabe 3.

Beweisen Sie [Buch, Theorem 25.5] unter Verwendung von [Buch, Theorem 25.4].
Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis durch.

Aufgabe 4 (Druck- und Scherwellen in einem elastischen Medium).

Es sei $T > 0$. Wir betrachten die Wellengleichung

$$\begin{aligned}\rho \partial_t^2 u(x, t) - \nabla \cdot \sigma(x, t) &= 0 && \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T), \\ \sigma(x, t) &= \mathbb{A} \nabla^s u(x, t) && \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T).\end{aligned}$$

Die Dichte $\rho > 0$ sei konstant und der Elastizitätstensor $\mathbb{A}$ sei wieder durch die Vorschrift $e \mapsto 2\mu e + \lambda \operatorname{spur}(e) \operatorname{id}$ gegeben. Das Medium sei effektiv eindimensional, d.h. alle Größen sollen nur von $x = x_1 \in \mathbb{R}$ abhängen (man denke zum Beispiel an Eisenbahnschienen). Zeigen Sie, dass die Wellen durch die Gleichung

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_{x_1}^2 u \quad \text{in } \mathbb{R} \times [0, T)$$

beschrieben werden. Die Wellengeschwindigkeit c erfüllt $c^2 = (2\mu + \lambda)/\rho$ für Longitudinalwellen und $c^2 = \mu/\rho$ für Scherwellen.