

Kontinuumsmechanik

Blatt 3

Abgabe am Montag, den 14.11.2016, in der Vorlesung

Aufgabe 1.

Sei $T > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes und beschränktes Lipschitzgebiet. Der Rand $\partial\Omega$ sei disjunkt zerlegt in einen Dirichletrand Γ_D mit $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma_D) > 0$ und einen Neumannrand Γ_N . Der Elastizitätstensor $\mathbb{A}: \mathbb{R}_s^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_s^{n \times n}$ sei symmetrisch und koerziv, d.h. es existiere eine Konstante $\gamma > 0$, so dass für alle $\xi \in \mathbb{R}_s^{n \times n}$ gilt: $\mathbb{A}\xi: \xi \geq \gamma \|\xi\|^2$. Weiterhin seien eine Volumenkraft $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega, \mathbb{R}^n))$ sowie Anfangsdaten $u_0 \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $u_1 \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gegeben. Es gelte die Kompatibilität $u_0 = 0$ auf Γ_D . Beweisen Sie eine a priori Abschätzung für eine klassische Lösung u der instationären Elastizitätsgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \nabla \cdot \sigma &= f && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \sigma &= \mathbb{A} \nabla^s u && \text{in } \Omega \times (0, T), \end{aligned}$$

mit Randbedingungen

$$\begin{aligned} u &= 0 && \text{auf } \Gamma_D \times [0, T], \\ \nu \cdot \sigma &= 0 && \text{auf } \Gamma_N \times [0, T], \end{aligned}$$

und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{in } \Omega, \\ \partial_t u(\cdot, 0) &= u_1 && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Anleitung: Testen Sie die Gleichung mit $\partial_t u$ und stellen Sie eine Gleichung für die Energie $E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$ auf, $E_{\text{kin}} := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial_t u|^2$ und $E_{\text{pot}} := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla^s u: \mathbb{A} \nabla^s u$. Schätzen Sie die Energie $E: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit Hilfe des Lemmas von Gronwall auf $[0, T]$ ab. Folgern Sie die Beschränktheit der Lösung u in $L^\infty(0, T; H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)) \cap W^{1\infty}(0, T; L^2(\Omega, \mathbb{R}^n))$. Die Schranke soll dabei nur von f , Ω , T , Γ_D , u_0 und u_1 abhängen.

(Bitte wenden)

Aufgabe 2.

Für $n \geq 1$ sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine schiefsymmetrische Matrix, d.h. $B = -B^T$. Sei $\ker B$ der Kern der Matrix B . Zeigen Sie: Falls $\dim \ker B \geq n - 1$, dann gilt: $B = 0$.

Aufgabe 3.

Sei $L > 0$ und $I := [-L, 0]$. Zeigen Sie, dass ein $C > 0$ existiert, so dass für jede Funktion $g \in C^1(I)$ mit $g(-L) = 0$ gilt:

$$\int_{-L}^0 |g(x)|^2 \, dx \leq C \int_{-L}^0 |x|^2 |g'(x)|^2 \, dx.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Hauptsatz der Differentialrechnung und Fubini.