Prof. Dr. B. Schweizer
M. Urban

Wintersemester 2016/17
17.11.2016

Kontinuumsmechanik

Blatt 5

Abgabe am Montag, den 28.11.2016, in der Vorlesung

Aufgabe 1.
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

i) Die Funktion f ist konvex.

ii) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y)\,.$$

Hinweis: Um die Aussage ii) $\Rightarrow$ i) zu zeigen, nehmen Sie zunächst an, dass f zweimal stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 2 (Instabilität eines Stabes unter Belastung).
Linearisieren Sie die Gleichung

$$\partial_x(A\,\partial_x\theta(x)) + F\sin(\theta(x)) = 0$$

für Eulers Elastica mit $x \in (0, L)$ und Randwerten $\partial_x\theta(0) = \partial_x\theta(L) = 0$ um die triviale Lösung $\theta \equiv 0$. Berechnen Sie einen kritischen Wert für die Kraft, $F_* = F_*(A, L)$, so dass Folgendes gilt:

1. Für Kräfte $0 < F < F_*$ hat die linearisierte Gleichung nur eine Lösung, nämlich die triviale Lösung.

2. Für die Kraft $F = F_*$ hat die linearisierte Gleichung unendlich viele Lösungen.

Zur Information: Bei Ausübung einer Kraft $F > F_*$ ist die Ruhelösung $\theta \equiv 0$ für den Stab nicht mehr stabil, ein realer Stab nimmt anstelle der geraden Form (unter Kompression) lieber eine gekrümmte Form ein. Auch die Lösung der nichtlinearen Gleichung ist für $F \ge F_*$ nicht mehr eindeutig, allerdings sorgt die Nichtlinearität dafür, dass für jedes F nur endlich viele Lösungen existieren.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Scherung in der Piola-Kirchhoff Theorie).

Stellen Sie für die Scherung aus Aufgabe 2 von Blatt 4 den Piola-Kirchhoff Tensor S auf.

Aufgabe 4 (Energieerhaltung).

Weisen Sie die Energieerhaltung [Buch, Gleichung (26.32)] nach.