

Kontinuumsmechanik

Blatt 11

Abgabe am Montag, den 23.01.2017, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Biot-Savart Rekonstruktion).

Leiten Sie im Ganzraumproblem für $\text{curl } v = \omega$ die Rekonstruktionsformel aus (22.21) ab.

Anleitung: Verwenden Sie die Fundamentallösungen

$$\Psi(x) \sim \log|x| \quad \text{beziehungsweise} \quad \Psi(x) \sim \frac{1}{|x|},$$

um die Gleichung $\Delta\psi = \omega$ zu lösen und differenzieren Sie einmal.

Aufgabe 2 (Rekonstruktion im Quader).

Entwickeln Sie für einen Quader $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2) \times (0, l_3)$ eine Rekonstruktionsmethode. Gesucht ist für eine divergenzfreie Wirbelstärke $\omega: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Geschwindigkeitsfeld $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\text{rot } v = \omega$. Verwenden Sie wieder den Ansatz $v = \text{rot } \Psi$ mit $\Delta\Psi = \omega$. Aufgrund von $\text{rot rot } \Psi = -\Delta\Psi + \nabla \text{div } \Psi$, wollen wir Ψ so wählen, dass $\text{div } \Psi = 0$ gilt. Wählen Sie dazu die Randbedingungen geeignet.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Rotierendes Glas).

Gesucht ist eine Lösung der dreidimensionalen Navier-Stokes Gleichungen mit Gewichtskraft $f = -g\rho e_3$. Wir modellieren ein rotierendes Glas, als Randbedingung geben wir uns daher eine starre Rotation vor.

Anleitung: Wählen Sie den Ansatz $v(x) = \omega \times x$ mit $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $\omega = \omega_0(0, 0, 1)$, wobei $\omega_0 \in \mathbb{R}$ die Winkelgeschwindigkeit ist. Berechnen Sie die Druckverteilung und das Höhenprofil des freien Randes, siehe Abbildung 1.

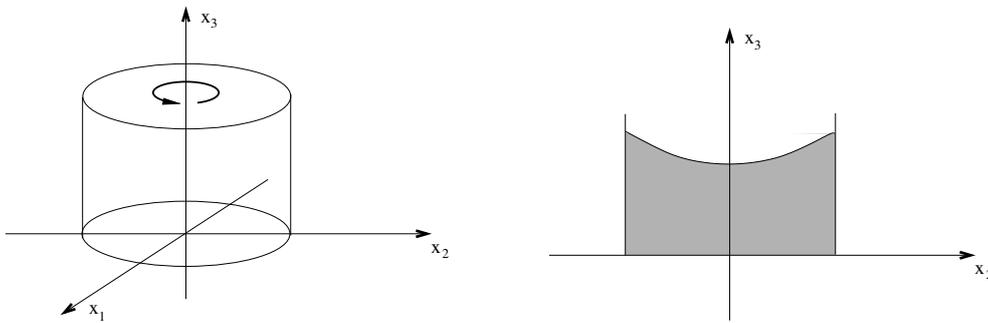


Abbildung 1: Rotierendes Glas