Kontinuumsmechanik

Blatt 13

Abgabe am Montag, den 06.02.2017, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Bemerkungen zur Vorlesung).

Zeigen Sie folgende Aussagen:

- i) Seien H_1 und H_2 Hilberträume. Ein stetiger linearer Operator $A: H_1 \rightarrow H_2$ ist kompakt dann und nur dann, wenn der duale Operator $A': H_2 \rightarrow H_1$ kompakt ist.
- ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $u \in L^2(\Omega)$. Für den distributionellen Gradienten gelte $\nabla u = 0$. Zeigen Sie mit einem Glättungsargument, dass u eine lokal konstante Funktion ist.

Aufgabe 2 (Fundamentallösung für die Stokes Gleichung).

Sei $\chi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ bi-harmonisch, also eine Lösung von $\Delta^2 \chi = 0$. Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $a \in \mathbb{R}^N$ durch

$$v_i = \sum_{j=1}^N a_j (\partial_i \partial_j \chi - \delta_{ij} \Delta \chi), \quad p = \sum_{j=1}^N a_j \partial_j \Delta \chi \quad (1)$$

eine Lösung der stationären Stokes Gleichungen gegeben ist. Die Fundamentallösung ist mit derselben Formel gegeben durch χ mit $\Delta^2 \chi = \delta$.

Aufgabe 3 (Umströmung einer Kugel, dreidimensionale Stokes Gleichung).

In Dimension $N = 3$ sei $U \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor, $a > 0$ ein Radius und $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Faktor. Wir verwenden $r = |x|$ und betrachten

$$v = \frac{3}{4} U_i \left(\frac{a}{r} + \frac{a^3}{3r^3} \right) + \frac{3}{4} \sum_{j=1}^3 U_j x_j x_i \left(\frac{a}{r^3} - \frac{a^3}{r^5} \right), \quad p = \alpha \sum_{j=1}^3 U_j x_j \frac{1}{r^3}. \quad (2)$$

Bestimmen Sie einen geeigneten Faktor α und zeigen Sie, dass mit diesem Ansatz eine Lösung der Stokes Gleichungen auf dem Außenraumgebiet $\mathbb{R}^3 \setminus B_a(0)$ zu den Randbedingungen $v = U$ auf $\partial B_a(0)$ und $|v| \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$ gegeben ist.

Zur Information: Mit diesem Ansatz lässt sich die Formel für die Stokes'sche Reibungskraft herleiten: Bei Umströmung einer Kugel mit Radius a mit einer Geschwindigkeit U bei einer Viskosität μ ist die Kraft F auf die Kugel gegeben durch $F = 6\pi\mu a|U|$.

Aufgabe 4 (Proposition 23.1 in einer vereinfachten Situation).

Das Residuum $F \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ erfülle eine Orthogonalitätsrelation: $\int_{\mathbb{R}^3} F \cdot \varphi = 0$ für alle $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit $\nabla \cdot \varphi = 0$. Zeigen Sie, dass dann eine Funktion $p \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ existiert mit $F = \nabla p$.

Anleitung: Zeigen Sie zunächst mit Testfunktionen $\varphi = \text{rot } \Psi$, dass $\text{rot } F = 0$ im Distributionssinn gilt. Schließen Sie mit einem Glättungsargument und der Poincaré Ungleichung (in H^1) auf die Existenz einer lokalen Druckfunktion.