

Kontinuumsmechanik

Blatt 1

Abgabe am Montag, den 31.10.2016, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Symmetrische und antisymmetrische Matrizen).

Es sei $n \geq 2$. Auf dem Raum $X = \mathbb{R}^{n \times n}$ der reellen $n \times n$ -Matrizen definieren wir das Skalarprodukt $\langle A, B \rangle := A : B := \sum_{k,l} A_{kl} B_{kl}$. Weiterhin seien zwei Operatoren $P_s, P_a : X \rightarrow X$ durch

$$P_s : B \mapsto \frac{1}{2}(B + B^T)$$

und

$$P_a : B \mapsto \frac{1}{2}(B - B^T).$$

gegeben.

- i) Zeigen Sie, dass P_s und P_a Projektionen sind, d.h. P_s und P_a sind linear und erfüllen $P_s^2 = P_s$ bzw. $P_a^2 = P_a$.
- ii) Beweisen Sie die orthogonale Zerlegung

$$X = P_s X \oplus_\perp P_a X.$$

- iii) Bestimmen Sie für $n = 2$ den Tensor 4. Stufe, $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_{ij}^{kl})_{ij}^{kl}$, der die Projektion P_s beschreibt.

Aufgabe 2 (Differentialoperator der Elastizität).

Sei $\mathbb{A} : \mathbb{R}_s^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_s^{n \times n}$ der Elastizitätstensor $e \mapsto 2\mu e + \lambda \text{spur}(e) \text{id}$, wobei wir annehmen, dass $\lambda \geq 0$ und $\mu > 0$ gilt. Zeigen Sie, dass sich das lineare Modell der Elastizitätstheorie,

$$-\nabla \cdot \sigma(x) = f(x), \quad \sigma(x) = \mathbb{A} \nabla^s u(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega,$$

schreiben lässt als

$$-\mu \Delta u - (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot u) = f \quad \text{in } \Omega.$$

Folgern Sie für $f = 0$ und glatte Lösungen u , dass $\nabla \cdot u$ und (in 2 und 3 Dimensionen)¹ $\text{curl } u$ harmonisch sind. Schließen Sie daraus, dass u biharmonisch ist, $\Delta \Delta u = 0$.

(Bitte wenden)

¹In 2 Raumdimensionen ist der curl-Operator durch die Vorschrift $\text{curl} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (u_1, u_2) \mapsto -\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2$ gegeben.

Aufgabe 3 (Rekonstruktion zweiter Ableitungen).

Sei $n \geq 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend. Weiterhin sei $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie folgende Relation für den symmetrischen Gradienten $e := \nabla^s u$ und seine Ableitungen,

$$\partial_j \partial_k u_i = \partial_j e_{ik} + \partial_k e_{ij} - \partial_i e_{jk} \quad \text{für alle } i, j, k \in \{1, \dots, n\}.$$

Aufgabe 4 (Lamé-Konstanten I: Scherung und Kompression).

Wir betrachten die Elastizitätsgleichungen

$$-\nabla \cdot \sigma(x) = f(x), \quad \sigma(x) = \mathbb{A} \nabla^s u(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega,$$

im dreidimensionalen Raum, wobei $\mathbb{A}: \mathbb{R}_s^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}_s^{3 \times 3}$ durch die Vorschrift $\mathbb{A}e = 2\mu e + \lambda \operatorname{spur}(e) \operatorname{id}$ gegeben ist. Die Lamé-Konstanten μ und λ seien beliebig vorgegeben.

Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ist eine Scherung gegeben durch

$$u(x) = \varepsilon x_2 e_1 \quad \text{mit} \quad \nabla^s u(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und eine gleichmäßige Kompression/Expansion ist gegeben durch

$$u(x) = \varepsilon x \quad \text{mit} \quad \nabla^s u(x) = \varepsilon \operatorname{id}.$$

Zeigen Sie, dass Scherung und Kompression Lösungen der Elastizitätsgleichungen sind und bestimmen Sie den Spannungstensor σ .