technische universität
dortmund

fakultät für
mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
M. Urban

Wintersemester 2016/17
14.12.2016

# Kontinuumsmechanik

## Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2 auf Blatt 7

Bitte beachten Sie, dass es sich bei diesem Lösungsvorschlag um keine Musterlösung handelt, da einige Aussagen nur skizzenhaft bewiesen werden.

---

**Aufgabe 2 (Relationen der von-Mises Plastizität).**
Weisen Sie die expliziten Relationen [Buch, (27.13) - (27.15), Seite 559] nach.

**Lösungsvorschlag.**
**Behauptung 1.** Für alle $\sigma \in X$ gilt

$$\partial\Psi(\sigma) = \begin{cases} \emptyset & \text{für } \sigma_D \notin K_D \\ \{0\} & \text{für } |\sigma_D| < \gamma \\ \{\lambda\sigma_D \mid \lambda \geq 0\} & \text{für } |\sigma_D| = \gamma \,. \end{cases}$$

*Beweis von Behauptung 1.* Für eine Matrix $\sigma \in X$ ist das Subdifferential $\partial\Psi(\sigma)$ wie folgt definiert:

$$\partial\Psi(\sigma) := \{\varepsilon \in X \mid \text{ für alle } \xi \in X \text{ gilt: } \Psi(\xi) \geq \varepsilon : (\xi - \sigma) + \Psi(\sigma)\} \,.$$

i) Es sei $\sigma_D \notin K_D$. In diesem Fall ist $\sigma \notin K$ und somit $\Psi(\sigma) = +\infty$. Da $\Psi(\xi) = 0$ für alle $\xi \in X$ mit $\xi_D \in K_D$, können wir schließen, dass $\partial\Psi(\sigma) = \emptyset$.

ii) Es sei $\sigma_D \in K_D$ mit $|\sigma_D| < \gamma$. In diesem Fall ist $\sigma \in K$ und somit $\Psi(\sigma) = 0$. Wir bemerken, dass $\Psi(\xi) = +\infty$ für alle $\xi \in X$ mit $\xi_D \notin K_D$. Somit ist $\varepsilon \in \partial\Psi(\sigma)$ genau dann, wenn für alle $\xi \in X$ mit $\xi_D \in K_D$ gilt: $0 \geq \varepsilon : (\xi - \sigma)$. Dies ist für $\varepsilon = 0$ offensichtlich erfüllt. Nehmen wir nun an, dass es ein $\varepsilon \in \partial\Psi(\sigma)$ mit $\varepsilon \neq 0$ gibt.
*1. Fall ($\varepsilon_D = 0$).* Setzen wir $\xi := \varepsilon + \sigma$, so ist $\xi_D = \sigma_D \in K_D$. Dann gilt aber:

$$0 \geq \varepsilon : (\xi - \sigma) = |\varepsilon|^2 \geq 0 \,,$$

woraus wir folgern können, dass $\varepsilon = 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $\varepsilon \neq 0$.
*2. Fall ($\varepsilon_D \neq 0$).* Nach Annahme ist $|\sigma_D| < \gamma$, so dass es ein $\eta \in (|\sigma_D|, \gamma)$ gibt. Wir definieren nun die reelle Zahl $b := (\eta - |\sigma_D|)|\varepsilon_D|^{-1} > 0$. Setzen wir $\xi := \sigma + b\varepsilon$, so ist $|\xi_D| \leq |\sigma_D| + \eta|\varepsilon_D| = \eta \leq \gamma$; insbesondere ist $\xi_D \in K_D$. Es folgt nun, dass

$$0 \geq \varepsilon : (\xi - \sigma) = b|\varepsilon|^2 \geq 0 \,.$$

Da $b > 0$ ist dies ist ein Widerspruch zu $\varepsilon \neq 0$.
Die Behauptung ist damit gezeigt.

iii) Es sei $\sigma_D \in K_D$ mit $|\sigma_D| = \gamma$. In diesem Fall ist $\sigma \in K$ und somit $\Psi(\sigma) = 0$. Wie schon in *ii*) gezeigt, gilt folgende Äquivalenz: $\varepsilon \in \partial\Psi(\sigma)$ genau dann, wenn $\varepsilon\colon (\xi - \sigma) \leq 0$ für alle $\xi \in X$ mit $\xi_D \in K_D$.

Wir zeigen zunächst, dass alle $\varepsilon \in \{\lambda\sigma_D \mid \lambda \geq 0\}$ auch im Subdifferential $\partial\Psi(\sigma)$ liegen. Da $\varepsilon_S = 0$, gilt für ein $\xi \in X$ mit $\xi_D \in K_D$, dass

$$\varepsilon\colon (\xi - \sigma) = \varepsilon_D\colon (\xi_D - \sigma_D) = \lambda\sigma_D\colon \xi_D - \lambda|\sigma_D|^2 \leq 0\,.$$

Die letzte Ungleichung folgt dabei aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung sowie der Tatsache, dass $|\sigma_D| = \gamma \geq |\xi_D|$.

Für den zweiten Teil des Beweises nehmen wir an, dass $\varepsilon \in \partial\Psi(\sigma)$, aber $\varepsilon \notin \{\lambda\sigma_D \mid \lambda \geq 0\}$ .
*1. Fall ($\varepsilon = \lambda\sigma_D$ für $\lambda < 0$).* Da $\varepsilon_S = 0$ folgt für ein $\xi \in X$ mit $\xi_D = 0$, dass

$$0 \geq \varepsilon\colon (\xi - \sigma) = \varepsilon_D\colon (\xi_D - \sigma_D) = -\lambda|\sigma_D|^2 \geq 0\,.$$

Da $|\sigma_D| = \gamma$ ist dies ein Widerspruch.
*2. Fall ($\varepsilon_S \neq 0$).* Setzen wir $\xi \coloneqq \sigma + \varepsilon_S$, so ist $\xi_D = \sigma_D \in K_D$ und es folgt:

$$0 \geq \varepsilon\colon (\xi - \sigma) = \varepsilon_S\colon (\xi_S - \sigma_S) = |\varepsilon_S|^2 \geq 0\,.$$

Da $\varepsilon_S \neq 0$ angenommen war, ist dies ein Widerspruch.

**Behauptung 2.** Für alle $\varepsilon \in X$ ist die Fenchel-Konjugierte $\Psi^*$ durch die Vorschrift

$$\Psi^*(\varepsilon) = \begin{cases} +\infty & \text{für } \varepsilon_S \neq 0 \\ \gamma|\varepsilon_D| & \text{für } \varepsilon_S = 0 \end{cases}$$

gegeben.
*Beweis von Behauptung 2.* Für $\varepsilon \in X$ ist die Fenchel-Konjugierte $\Psi^*$ gegeben durch

$$\Psi^*(\varepsilon) \coloneqq \sup_{\xi \in X}\{\xi\colon \varepsilon - \Psi(\xi)\}\,.$$

i) Es sei $\varepsilon \in X$ mit $\varepsilon_S = 0$. Da $\Psi(\xi) = +\infty$ für $\xi \notin K$, genügt es, wenn wir das Supremum über der Menge $K$ bestimmen. Wir bemerken, dass $|\xi_D| \leq \gamma$ für einen Vektor $\xi \in K$. Da Gleichheit in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für linear abhängige Vektoren gilt, folgt

$$\Psi^*(\varepsilon) = \sup_{\xi \in K}\{\xi_D\colon \varepsilon_D - \Psi(\xi)\} = \sup_{\xi \in K} \xi_D\colon \varepsilon_D = \gamma|\varepsilon_D|\,.$$

ii) Es sei $\varepsilon \in X$ mit $\varepsilon_S \neq 0$. Wie in *i*) erläutert, genügt es das Supremum über der Menge $K$ zu betrachten. Wir erhalten dann:

$$\Psi^*(\varepsilon) = \sup_{\xi \in K}\{\xi_D\colon \varepsilon_D + \xi_S\colon \varepsilon_S\} \geq \overline{\xi_D}\colon \varepsilon_D + \sup_{\xi_S \in \mathbb{R}\,\mathrm{id}_X}\{\xi_S\colon \varepsilon_S\} = +\infty\,.$$

Hierbei ist $\overline{\xi_D} \in K_D$ ein beliebiger, aber fester Vektor.

**Behauptung 3.** Für alle $\varepsilon \in X$ ist das Subdifferential $\partial\Psi^*(\varepsilon)$ gegeben durch

$$\partial\Psi^*(\varepsilon) = \begin{cases} \emptyset & \text{für } \varepsilon_S \neq 0 \\ K & \text{für } \varepsilon_S = 0, \varepsilon_D = 0 \\ \{\sigma \mid \sigma_D = \gamma\varepsilon_D|\varepsilon_D|^{-1}\}\,. \end{cases}$$

*Beweis von Behauptung 3.* Für eine Matrix $\sigma \in X$ ist das Subdifferential $\partial\Psi^*(\varepsilon)$ wie folgt definiert:

$$\partial\Psi^*(\varepsilon) \coloneqq \{\sigma \in X \mid \text{ für alle } \xi \in X \text{ gilt: } \Psi^*(\xi) \geq \sigma\colon (\xi - \varepsilon) + \Psi^*(\varepsilon)\}\,.$$

i) Es sei $\varepsilon_S \neq 0$. In diesem Fall ist $\Psi^*(\varepsilon) = +\infty$. Da $\Psi^*(\xi) < +\infty$ für alle $\xi \in X$ mit $\xi_S = 0$, ist das Subdifferential $\partial\Psi^*(\varepsilon)$ leer.

ii) Es sei $\varepsilon_S = \varepsilon_D = 0$. In diesem Fall ist $\Psi^*(\varepsilon) = \gamma|\varepsilon_D| = 0$. Da $\Psi^*(\xi) = +\infty$ für alle $\xi \in X$ mit $\xi_S \neq 0$, gilt folgende Äquivalenz: $\sigma \in \partial\Psi^*(\varepsilon)$ genau dann, wenn $\gamma|\xi_D| \geq \sigma_D\colon (\xi_D - \varepsilon_D) + \gamma|\varepsilon_D|$ für alle Vektoren $\xi \in X$ mit $\xi_S = 0$. Für ein $\sigma \in K$ ist $|\sigma_D| \leq \gamma$, sodass wir folgendes erhalten:

$$\sigma_D\colon (\xi_D - \varepsilon_D) + \gamma|\varepsilon_D| = \sigma_D\colon \xi_D \leq |\sigma_D||\xi_D| \leq \gamma|\xi_D|\,.$$

Wir haben damit gezeigt, dass $K \subset \partial\Psi^*(\varepsilon)$.

Für den zweiten Teil des Beweises sei $\sigma \in \partial\Psi^*(\varepsilon)$, aber $\sigma \notin K$. Es ist also $|\sigma_D| > \gamma$. Für alle $\xi \in X$ mit $\xi_S = 0$ gilt somit

$$\sigma_D\colon \xi_D \leq \gamma|\xi_D|\,.$$

Setzt man nun $\xi \coloneqq \sigma_D$, so erhält man einen Widerspruch zu $|\sigma_D| > \gamma$.

iii) Es sei $\varepsilon \in X$ mit $\varepsilon_S = 0$ und $\varepsilon_D \neq 0$. Wie in *ii*) erläutert, gilt folgende Äquivalenz: $\sigma \in \partial\Psi^*(\varepsilon)$ genau dann, wenn $\gamma|\xi_D| \geq \sigma_D\colon (\xi_D - \varepsilon_D) + \gamma|\varepsilon_D|$ für alle $\xi \in X$.

Wir zeigen zunächst, dass alle $\sigma \in \{\sigma \mid \sigma_D = \gamma\varepsilon_D|\varepsilon_D|^{-1}\}$ auch im Subdifferential $\partial\Psi^*(\varepsilon)$ liegen. Für ein solches $\sigma$ gilt:

$$\sigma_D\colon (\xi_D - \varepsilon_D) + \gamma|\varepsilon_D| = \gamma|\varepsilon_D|^{-1}\varepsilon_D\colon \xi_D - \gamma|\varepsilon_D| + \gamma|\varepsilon_D| \leq \gamma|\xi_D|\,.$$

Für den zweiten Teil des Beweises nehmen wir an, dass es ein $\sigma \in \partial\Psi^*(\varepsilon)$ mit $\sigma_D \neq \gamma\varepsilon_D|\varepsilon_D|^{-1}$.
*1. Fall ($|\sigma_D| < \gamma$).* Setzen wir $\xi \coloneqq 0$, so folgt:

$$0 = \gamma|\xi_D| \geq -\sigma_D\colon \varepsilon_D + \gamma|\varepsilon_D|\,.$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung können wir dann schließen, dass

$$\gamma|\varepsilon_D| \leq \sigma_D\colon \varepsilon_D \leq |\sigma_D||\varepsilon_D| < \gamma|\varepsilon_D|\,.$$

Dies ist ein Widerspruch.
*2. Fall ($|\gamma_D| > \gamma$).* Setzen wir $\xi \coloneqq \varepsilon_D + \sigma_D|\sigma_D|^{-1}$, so gilt:

$$\gamma\left|\varepsilon_D + \frac{\sigma_D}{|\sigma_D|}\right| \geq |\sigma_D| + \gamma|\varepsilon_D|\,.$$

Aus der Dreiecksungleichung sowie der Abschätzung $|\sigma_D| > \gamma$ folgt:

$$\gamma + \gamma|\varepsilon_D| < |\sigma_D| + \gamma|\varepsilon_D| \leq \gamma|\varepsilon_D| + \gamma \,.$$

Dies ist ein Widerspruch.
*3. Fall ($|\sigma_D| = \gamma$).* Setze $\xi \coloneqq \sigma_D$. Da $\gamma = |\sigma_D|$, gilt

$$|\sigma_D|^2 \geq |\sigma_D|^2 + |\sigma_D||\varepsilon_D| - \sigma_D \colon \varepsilon_D \,.$$

Unter Verwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, können wir wie folgt abschätzen:

$$|\sigma_D||\varepsilon_D| \leq \sigma_D \colon \varepsilon_D \leq |\sigma_D||\varepsilon_D| \,.$$

In der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt Gleichheit nur, falls $\sigma_D$ und $\varepsilon_D$ linear abhängig sind. Es existiert folglich ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\sigma_D = \lambda\varepsilon_D$. Aufgrund der Annahme $|\sigma_D| = \gamma$, muss $\lambda = \gamma|\varepsilon_D|^{-1}$ gelten. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme, dass $\gamma_D \neq \gamma\varepsilon_D|\varepsilon_D|$.
Da wir in allen drei Fällen einen Widerspruch erzeugt haben, können wir auf die Behauptung schließen.