# Eine robuste, genaue und effiziente Methode zur Gitterdeformation im Kontext von r-Adaptivität

Matthias Grajewski

Matthias.Grajewski@math.uni-dortmund.de

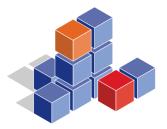
Universität Dortmund



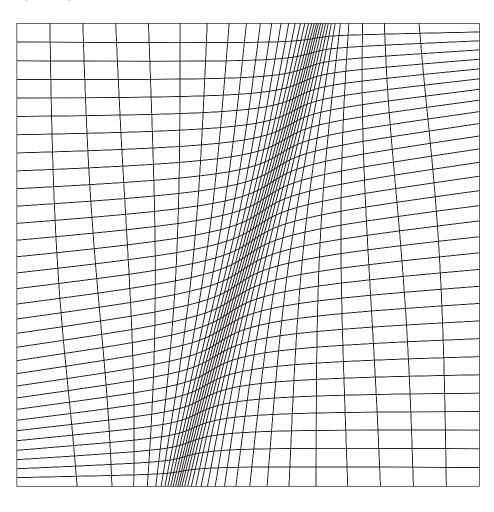
# **Gliederung**

- Motivation
- Gitterkonzepte f

  ür HPC
- Gitterdeformation: Herleitung und Konvergenz
- Mehrgitterdeformation
- r-Adaptivität



#### 1. Grund: Flexibilität





2. Grund: SPEED



2. Grund: SPEED

Beobachtung: AFEM: MFlop/s-Rate ≪ peak performance



2. Grund: SPEED

Beobachtung: AFEM: MFlop/s-Rate ≪ peak performance

Beispiel: MV-Multiplikation in **FEATFLOW** (F77-code):

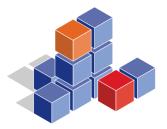
	NEQ	SP-MOD	SP-STO	SBB-V
AMD Opteron 852	4.225	557	561	1805
2,6 Ghz	66.049	395	223	660
4280 MFLOP/s	1.050.625	391	75	591

aus: Dissertation Chr. Becker 2007



#### Warum dieser Einbruch?:

- CPU speed ≫ memory speed
- 2. aktuelle FEM-codes verwenden
  - indirekte Adressierung : viele (ungeordnete)
     Speicherzugriffe
  - globale Datenstrukturen verhindern effektives caching



#### Warum dieser Einbruch?:

- CPU speed ≫ memory speed
- 2. aktuelle FEM-codes verwenden
  - indirekte Adressierung : viele (ungeordnete)
     Speicherzugriffe
  - globale Datenstrukturen verhindern effektives caching

#### **Problem:**

Elementweise unstrukturierte Gitter ermöglichen Adaptivität, aber verhindern direkte Adressierung;

Tensorproduktgitter **ermöglichen direkte Adressierung**, aber **verhindern Adaptivität** (scheinbar).

#### Warum dieser Einbruch?:

- CPU speed ≫ memory speed
- 2. aktuelle FEM-codes verwenden
  - indirekte Adressierung : viele (ungeordnete)
     Speicherzugriffe
  - globale Datenstrukturen verhindern effektives caching

#### **Problem:**

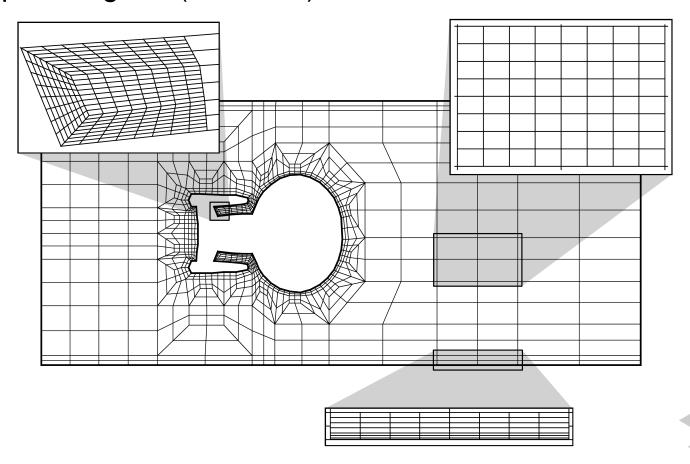
Elementweise unstrukturierte Gitter ermöglichen Adaptivität, aber verhindern direkte Adressierung;

Tensorproduktgitter **ermöglichen direkte Adressierung**, aber **verhindern Adaptivität** (scheinbar).

Synthese: FEAST

# FEAST-Konzept (der gitterrelevante Teil)

globales Gitter: "viele" lokale verallgemeinerte Tensorproduktgitter ("macros").



Vorgabe: erhalte die lokale Tensorproduktstruktur



Vorgabe: erhalte die lokale Tensorproduktstruktur

Ansatz 1: macroweise h-Adaptivität ('hanging nodes')



Vorgabe: erhalte die lokale Tensorproduktstruktur

Ansatz 1: macroweise h-Adaptivität ('hanging nodes')

Ansatz 2: r-Adaptivität (erhält die logische Struktur des Gitters)



Vorgabe: erhalte die lokale Tensorproduktstruktur

Ansatz 1: macroweise h-Adaptivität ('hanging nodes')

Ansatz 2: r-Adaptivität (erhält die logische Struktur des Gitters)

Ansatz 3: kombiniere 1 und 2



Vorgabe: erhalte die lokale Tensorproduktstruktur

Ansatz 1: macroweise h-Adaptivität ('hanging nodes')

Ansatz 2: r-Adaptivität (erhält die logische Struktur des Gitters)

Ansatz 3: kombiniere 1 und 2

r-Adaptivität



- Gebiet  $\Omega$
- Triangulierung T, Vierecke T
- "Monitorfunktion"  $0<\varepsilon< f\in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ : gewünschte Flächenverteilung
- "Gewichtsfunktion"  $0 < \varepsilon < g \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ : vorhandene Flächenverteilung

**Ziel:** Transformation  $\Phi:\Omega\to\Omega$  mit

$$|g(x)|J\Phi(x)| = f(\Phi(x)) \quad \forall x \in \Omega$$

und

$$\Phi: \partial\Omega \to \partial\Omega.$$

$$\mathcal{T}^d = \Phi(\mathcal{T}), \quad X := \Phi(x)$$



$$m(\Phi(T)) := \int_{\Phi(T)} 1 \, dx = \int_{T} |J\Phi(x)| dx,$$



$$m(\Phi(T)) := \int_{\Phi(T)} 1 \, dx = \int_{T} |J\Phi(x)| dx,$$

#### $1 \times 1$ Gauss-Formel:

$$g(x_c)\frac{m(\Phi(T))}{m(T)} = f(\Phi(x_c)) + \mathcal{O}(h).$$



$$m(\Phi(T)) := \int_{\Phi(T)} 1 \, dx = \int_{T} |J\Phi(x)| dx,$$

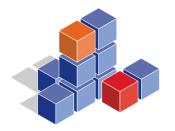
#### $1 \times 1$ Gauss-Formel:

$$g(x_c)\frac{m(\Phi(T))}{m(T)} = f(\Phi(x_c)) + \mathcal{O}(h).$$

Wenn nun

$$g(x) = c(h) m(T) + \mathcal{O}(h), x \in T$$

gilt, dann



$$m(\Phi(T)) := \int_{\Phi(T)} 1 \, dx = \int_{T} |J\Phi(x)| dx,$$

#### $1 \times 1$ Gauss-Formel:

$$g(x_c)\frac{m(\Phi(T))}{m(T)} = f(\Phi(x_c)) + \mathcal{O}(h).$$

Wenn nun

$$g(x) = c(h) m(T) + \mathcal{O}(h), x \in T$$

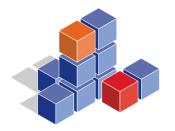
gilt, dann

$$c(h) m(\Phi(T)) = f(\Phi(x_c)) + \mathcal{O}(h)$$



#### Konsistenzbedingung:

$$\int_{\Phi(\Omega)} \frac{1}{f(x)} dx = \int_{\Omega} \frac{1}{f(\Phi(x))} |J(\Phi(x))| dx$$
$$= \frac{1}{f(\Phi(x))} \cdot \frac{f(\Phi(x))}{g(x)} dx$$
$$= \int_{\Omega} \frac{1}{g(x)} dx$$



#### Konsistenzbedingung:

$$\int_{\Phi(\Omega)} \frac{1}{f(x)} dx = \int_{\Omega} \frac{1}{f(\Phi(x))} |J(\Phi(x))| dx$$
$$= \frac{1}{f(\Phi(x))} \cdot \frac{f(\Phi(x))}{g(x)} dx$$
$$= \int_{\Omega} \frac{1}{g(x)} dx$$

$$\Rightarrow c(h) = ch^{-2} \Rightarrow$$

$$m(\Phi(T)) = ch^2 f(\Phi(x_c)) + \mathcal{O}(h^3), x \in T.$$



#### **Deformationsverfahren**

#### **Deformation**(f, T)

berechne 
$$ilde{f}- ilde{g}, \quad ilde{f}:=c/f, ilde{g}=C/g, \int ilde{f}\stackrel{!}{=}\int ilde{g}$$

#### löse

$$-\operatorname{div}(v(x)) = \tilde{f}(x) - \tilde{g}(x), \ x \in \Omega, \qquad v(x) \cdot \mathfrak{n} = 0, \ x \in \partial \Omega$$

#### DO FORALL $x \in \mathcal{T}$

#### löse

$$\partial_t \varphi(x,t) = \frac{v(\varphi(x,t),t)}{t\tilde{f}(\varphi(x,t)) + (1-t)\tilde{g}(\varphi(x,t))}, \quad 0 \le t \le 1, \ \varphi(x,0) = x$$

$$\Phi(x) := \varphi(x, 1)$$

#### **ENDDO**

#### **END Deformation**



#### **Theorie**

Theorem(Moser) Sei  $0 \ge k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha > 0$ . Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet mit  $\mathcal{C}^{3+k,\alpha}$ -glattem Rand. Sei weiter  $f,g \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$  mit  $\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} g$ . Dann existiert ein  $\mathcal{C}^{k+1,\alpha}$ -Diffeomorphismus  $\Phi: \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$  mit

$$|g(x)|J\Phi(x)| = f(\Phi(x)) \quad \forall x \in \Omega$$

und

$$\Phi(x) = x \quad \forall x \in \partial \Omega.$$



#### **Theorie**

Theorem(Moser) Sei  $0 \ge k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha > 0$ . Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet mit  $\mathcal{C}^{3+k,\alpha}$ -glattem Rand. Sei weiter  $f,g \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$  mit  $\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} g$ . Dann existiert ein  $\mathcal{C}^{k+1,\alpha}$ -Diffeomorphismus  $\Phi: \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$  mit

$$|g(x)|J\Phi(x)| = f(\Phi(x)) \quad \forall x \in \Omega$$

und

$$\Phi(x) = x \quad \forall x \in \partial \Omega.$$

Theorem Sei  $\Omega$  wie oben. Wenn die Deformationsabbildung  $\Phi: \Omega \to \Omega$  existiert, erfüllt sie die obigen Bedingungen.

## numerische Realisierung

#### **Deformation**(f, T)

berechne 
$$\tilde{f} - \tilde{g}$$
,  $g = g(\mathcal{T})$ 

löse 
$$(\nabla w_h, \nabla \varphi_h) = (\tilde{f} - \tilde{g}, \varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in \mathcal{Q}_1(\mathcal{T})$$

$$v_h := G_h(w_h)$$

#### DO FORALL $x \in \mathcal{T}$

#### löse

$$\partial_t \varphi(x,t) = \frac{v_h(\varphi(x,t),t)}{t\tilde{f}(\varphi(x,t)) + (1-t)\tilde{g}(\varphi(x,t))}, \quad 0 \le t \le 1, \ \varphi(x,0) = x$$

$$\Phi_h(x) = \varphi(x, 1)$$

#### **ENDDO**

#### **END Deformation**



Situation: geg.  $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}, N_i < N_{i+1}$ , mit

$$h_i := \max_{e \in \mathcal{E}_i} |e| = \mathcal{O}(N_i^{-0.5}) \quad \forall i \in I \ (\mathsf{Kantenregularit"at})$$

$$\exists 0 < c, C : ch_i^2 \le m(T) \le Ch_i^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_i \forall i \in I(\mathsf{Flächenregularit"at})$$



Situation: geg.  $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}, N_i < N_{i+1}$ , mit

$$h_i := \max_{e \in \mathcal{E}_i} |e| = \mathcal{O}(N_i^{-0.5}) \quad \forall i \in I \text{ (Kantenregularität)}$$

$$\exists 0 < c, C: ch_i^2 \leq m(T) \leq Ch_i^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_i \forall i \in I(\mathsf{Fl\"{a}chenregularit\"{a}t})$$

Flächenähnlichkeit:  $\exists 0 < g_{\min} < g < g_{\max} < \infty$  mit

$$\frac{1}{h_i^2}c_im(T) = g(x) + \mathcal{O}(h_i) \quad \forall x \in T \quad \forall T \in \mathcal{T}_i \forall i \in I, \quad c_s \le c_i \le C_s.$$

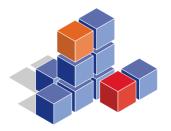


1. Ansatz: Vergleich mit "Referenzdeformation":  $||\Phi_h - \Phi|| \to 0$ 



1. Ansatz: Vergleich mit "Referenzdeformation":  $||\Phi_h - \Phi|| \to 0$ Probleme:

- $\Phi$  eindeutig nur durch  $\operatorname{rot} v \stackrel{!}{=} 0$
- $||\Phi_h \Phi||$  schwierig zu berechnen

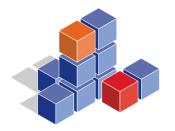


1. Ansatz: Vergleich mit "Referenzdeformation":  $||\Phi_h - \Phi|| \rightarrow 0$ Probleme:

- $\Phi$  eindeutig nur durch  $\operatorname{rot} v \stackrel{!}{=} 0$
- $||\Phi_h \Phi||$  schwierig zu berechnen

2. Ansatz: 
$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \stackrel{!}{\approx} 0 \Rightarrow$$

$$Q_0 := ||q||_{L^2(\Omega)}, \quad Q_\infty := ||q||_{L^\infty(\Omega)}$$



1. Ansatz: Vergleich mit "Referenzdeformation":  $||\Phi_h - \Phi|| \rightarrow 0$ Probleme:

- $\Phi$  eindeutig nur durch  $\operatorname{rot} v \stackrel{!}{=} 0$
- $||\Phi_h \Phi||$  schwierig zu berechnen

2. Ansatz: 
$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \stackrel{!}{\approx} 0 \Rightarrow$$

$$Q_0 := ||q||_{L^2(\Omega)}, \quad Q_\infty := ||q||_{L^\infty(\Omega)}$$

Konvergenz : $\Leftrightarrow Q_0 \to 0, Q_\infty \to 0, h \to 0$ 



 $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$  sei stets kantenregulär.



 $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$  sei stets kantenregulär.

**Lemma 1**  $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$  flächenähnlich  $\Rightarrow (\mathcal{T}_i)_{i \in I}$  flächenregulär



 $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$  sei stets kantenregulär.

**Lemma 1**  $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$  flächenähnlich  $\Rightarrow (\mathcal{T}_i)_{i \in I}$  flächenregulär

**Lemma 2**  $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$  flächenähnlich  $\Rightarrow (\mathcal{T}_i^d)_{i \in I}$  kantenregulär



 $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$  sei stets kantenregulär.

**Lemma 1**  $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$  flächenähnlich  $\Rightarrow (\mathcal{T}_i)_{i \in I}$  flächenregulär

**Lemma 2**  $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$  flächenähnlich  $\Rightarrow (\mathcal{T}_i^d)_{i \in I}$  kantenregulär

Lemma 3 Sei  $0 < \varepsilon < f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ ,  $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$  flächenähnlich  $\Rightarrow (\mathcal{T}_i^d)_{i \in I}$  flächenregulär.



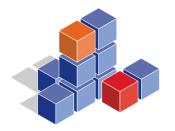
## Konvergenzsatz

 $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$  sei kantenregulär und flächenähnlich,  $0<\varepsilon< f\in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ . Weiterhin gelte  $||\nabla w-G_hw_h||_{\infty}=\mathcal{O}(h^{1+\delta})$ ,  $\delta>0$  und  $||X_h-\tilde{X}||=\mathcal{O}(h^{1+\delta})$ .

#### Dann:

- a)  $(\tilde{\mathcal{T}}_i)_{i \in I}$  ist kantenregulär
- b)  $(\tilde{\mathcal{T}}_i)_{i \in I}$  ist flächenregulär
- c)  $\exists c > 0$ :

$$Q_0 \le ch^{\min\{1,\delta\}}, \quad Q_\infty \le ch^{\min\{1,\delta\}}.$$



## **Test Problem**

 $\Omega = [0,1]^2$ , Tensorproduktgitter

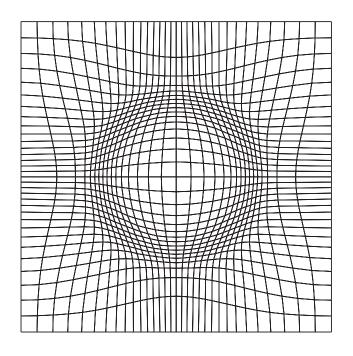
$$f(x) = \min \left\{ 1, \max \left\{ \frac{|d - 0.25|}{0.25}, \varepsilon \right\} \right\}, \quad d := \sqrt{\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2}$$



## **Test Problem**

 $\Omega = [0,1]^2$ , Tensorproduktgitter

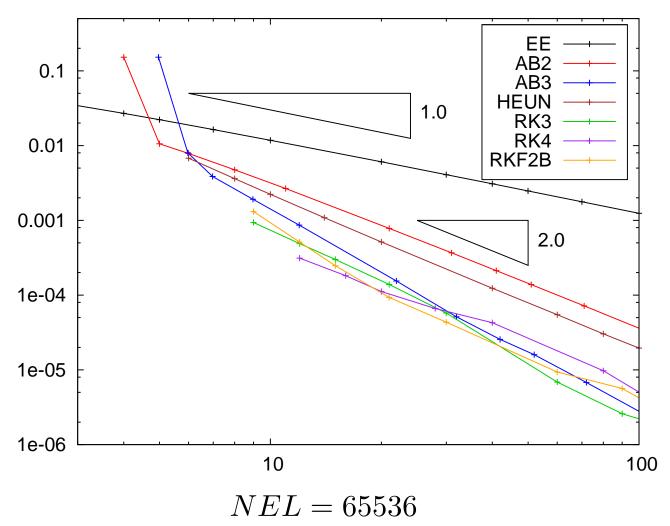
$$f(x) = \min \left\{ 1, \max \left\{ \frac{|d - 0.25|}{0.25}, \varepsilon \right\} \right\}, \quad d := \sqrt{\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2}$$



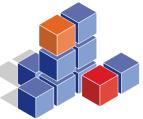
$$\varepsilon = 0.1$$



## Konvergenz der ODE-Löser



ODE-Fehler:  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ 



## Konvergenz am Testbeispiel

#### Korollar Sei

$$||\nabla w - G_h w_h||_{L^{\infty}} = \mathcal{O}(h^2), \quad \Delta t = \mathcal{O}(h).$$

$$\Rightarrow \quad Q_0 = \mathcal{O}(h), \quad Q_{\infty} = \mathcal{O}(h)$$

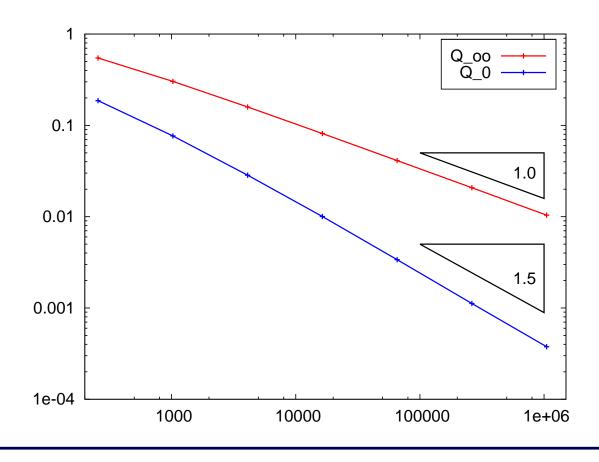


## Konvergenz am Testbeispiel

#### Korollar Sei

$$||\nabla w - G_h w_h||_{L^{\infty}} = \mathcal{O}(h^2), \quad \Delta t = \mathcal{O}(h).$$

$$\Rightarrow$$
  $Q_0 = \mathcal{O}(h), \quad Q_\infty = \mathcal{O}(h)$ 



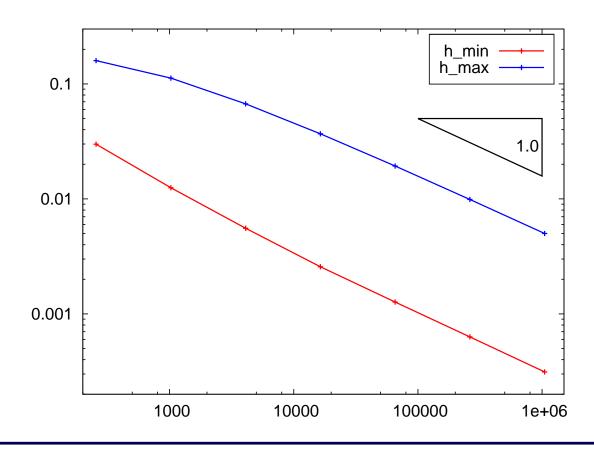


## Konvergenz am Testbeispiel

#### Korollar Sei

$$||\nabla w - G_h w_h||_{L^{\infty}} = \mathcal{O}(h^2), \quad \Delta t = \mathcal{O}(h).$$

$$\Rightarrow$$
  $Q_0 = \mathcal{O}(h), \quad Q_\infty = \mathcal{O}(h)$ 





## Grenzen der Methode

$$\Omega_{1} \qquad \Omega_{2}$$

$$(-2,1) \qquad (1,1)$$

$$\Omega_{2} \qquad (-2,0) \qquad (-1,0) \qquad (1,0)$$

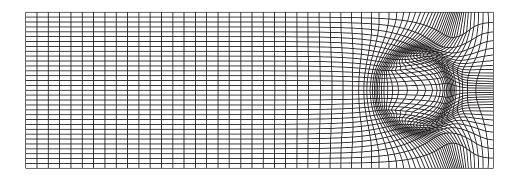
$$g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & , & x \in \Omega_{1} \\ 2 & , & x \in \Omega_{2} \end{array} \right. f(x) = \min \left\{ 1, \max \left\{ \frac{|d - 0.25|}{0.25}, \varepsilon \right\} \right\}$$

$$g \notin C(\overline{\Omega}) \Rightarrow w \notin H^{2+k}(\Omega), k > 0$$

$$\Rightarrow ||\nabla w - G_h w_h||_{L^{\infty}} \neq \mathcal{O}(h^2)$$

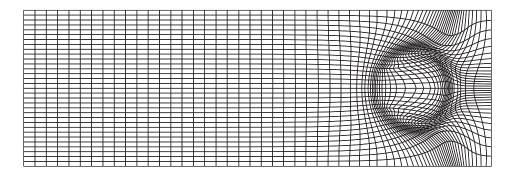


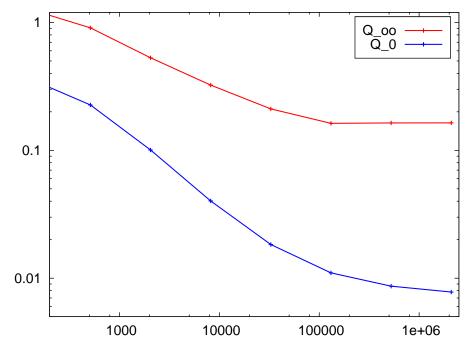
## Grenzen der Methode





## Grenzen der Methode







## Laufzeitverhalten

Konvergenz: Zeitschrittweite  $\Delta t = \mathcal{O}(h) = \mathcal{O}(N^{-1/2})$ 

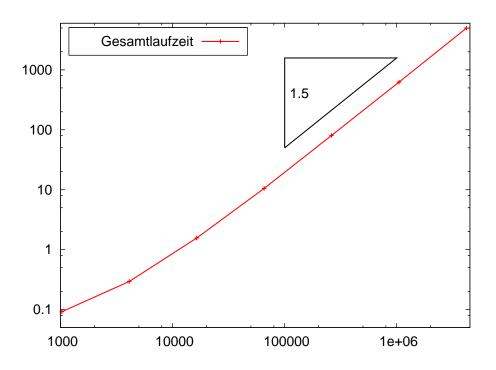
Komplexität:  $\mathcal{O}(N^{3/2})$ 



## Laufzeitverhalten

Konvergenz: Zeitschrittweite  $\Delta t = \mathcal{O}(h) = \mathcal{O}(N^{-1/2})$ 

Komplexität:  $\mathcal{O}(N^{3/2})$ 





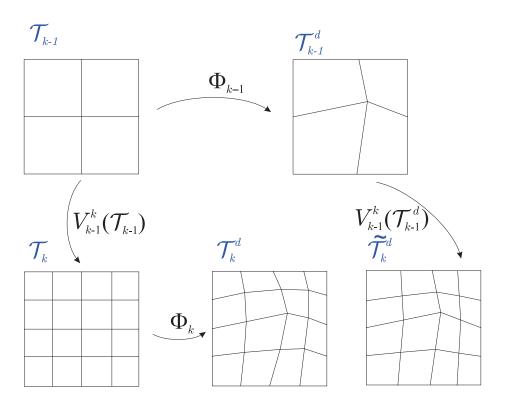
Ziel: feste Zeitschrittweite + Konvergenz

in der Praxis: Gittersequenz durch sukzessives Verfeinern



Ziel: feste Zeitschrittweite + Konvergenz

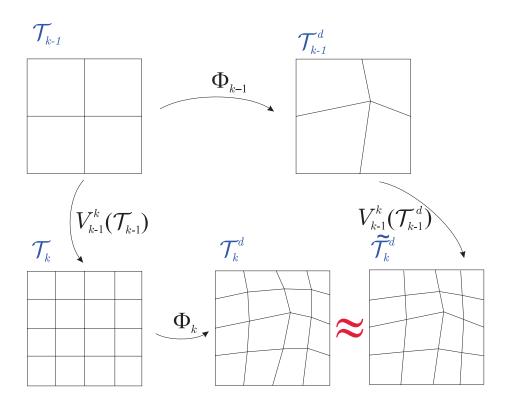
in der Praxis: Gittersequenz durch sukzessives Verfeinern





Ziel: feste Zeitschrittweite + Konvergenz

in der Praxis: Gittersequenz durch sukzessives Verfeinern





#### Idee:

- Deformation auf grobem Gitter
- Verfeinerung
- Deformation auf feinem Gitter (Korrekturschritt)



#### Idee:

- Deformation auf grobem Gitter
- Verfeinerung
- Deformation auf feinem Gitter (Korrekturschritt)

#### Annahme 1:

$$d_k := \max_{x \in \mathcal{X}_k} ||x - \Phi(x)|| \stackrel{?!}{=} \mathcal{O}(h^2)$$

#### Annahme 2:

$$\frac{||X_h - \tilde{X}||}{||x - \Phi(x)||} \le c$$



#### Idee:

- Deformation auf grobem Gitter
- Verfeinerung
- Deformation auf feinem Gitter (Korrekturschritt)

#### Annahme 1:

$$d_k := \max_{x \in \mathcal{X}_k} ||x - \Phi(x)|| \stackrel{?!}{=} \mathcal{O}(h^2)$$

#### Annahme 2:

$$\frac{||X_h - \tilde{X}||}{||x - \Phi(x)||} \le c$$

$$\Rightarrow ||X_h - \tilde{X}|| = \mathcal{O}(h^2)$$



## **Algorithmus**

## MehrgitterDeformation(f, $\mathcal{T}$ , $N_{\text{pre}}$ ): $\mathcal{T}$

$$\mathcal{T}_{i_{\min}} := \mathsf{R} \left( \mathcal{T}, i_{\min} \right)$$

DO 
$$i = i_{\min}, i_{\max}, i_{incr}$$

$$\mathcal{T}_i := \mathsf{PreSmooth}(\ \mathcal{T}_i,\ N_{\mathsf{pre}}(i))$$

$$\mathcal{T}_i := \mathsf{Deformation}(f, \mathcal{T}_i)$$

IF ( 
$$i < i_{\max}$$
)  $\mathcal{T}_{i+1} := V(\mathcal{T}_i)$ 

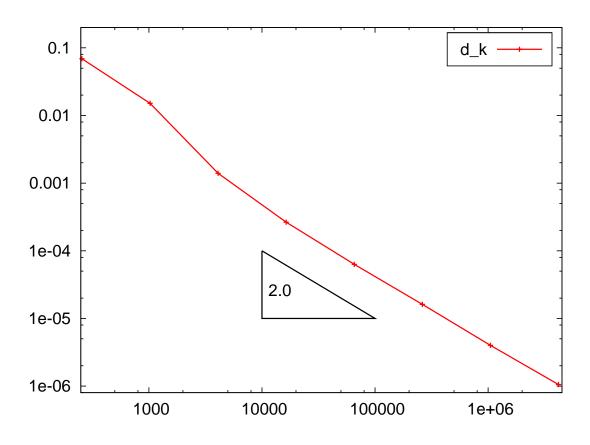
#### **ENDDO**

$$\mathcal{T} := \mathcal{T}_{i_{\max}}$$

RETURN  $\mathcal{T}$ 

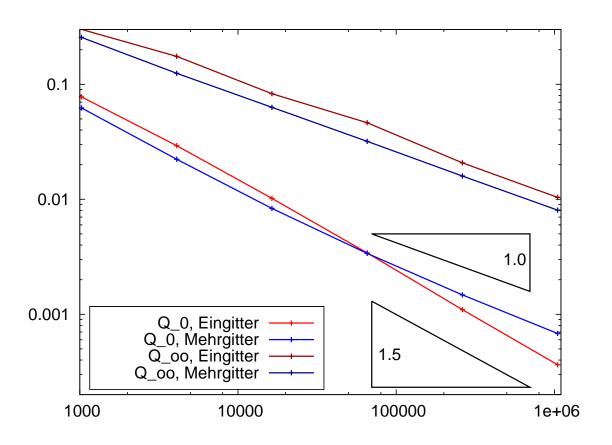
**END MehrgitterDeformation** 





$$i_{\min}=3$$
,  $i_{\mathrm{incr}}=1$ ,  $N_{\mathrm{pre}}=2$ 

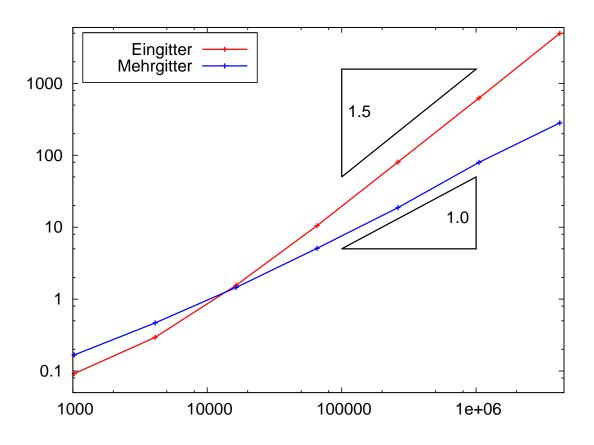




Konvergenz trotz fester Zeitschrittweite



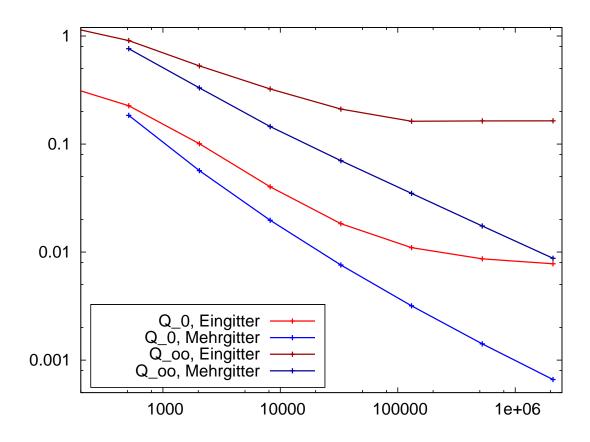
# Laufzeitvergleich



fast optimale Komplexität



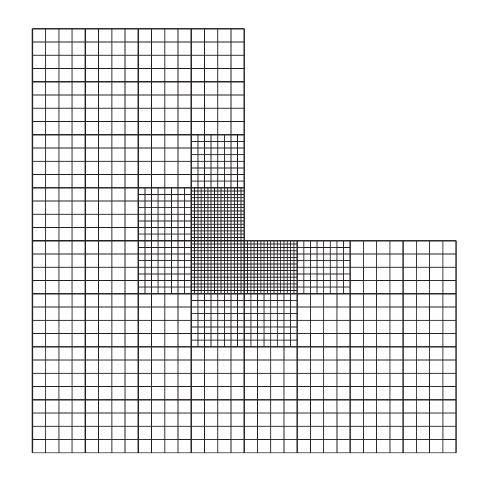
## Robustheit



Konvergenz beim 2. Testbeispiel



## Testproblem: L-Gebiet, 48 macros



### Poisson-Gleichung

$$\Omega = [-0.5, 0.5]^2 / [0, 0.5]^2$$

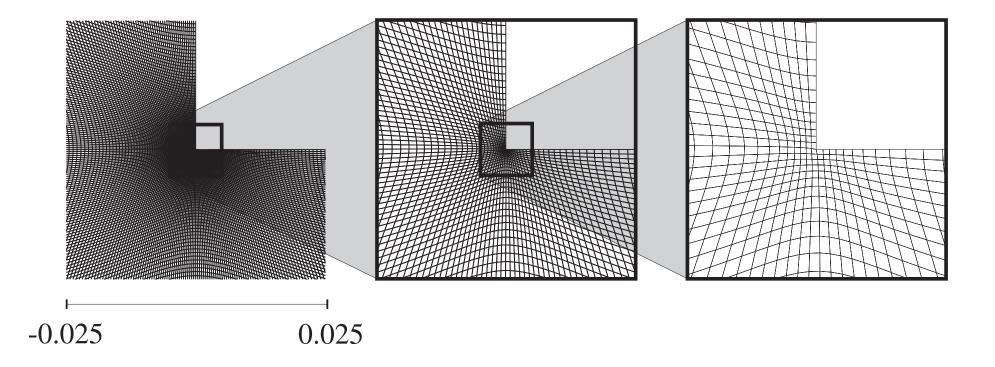
$$u(r,\varphi) = r^{2/3}\sin(2/3\varphi)$$

$$f(r) = \min \left\{ 1, \max\{c_0 h, \sqrt{2}|r|\} \right\}$$

gesucht: Gradientenfehler

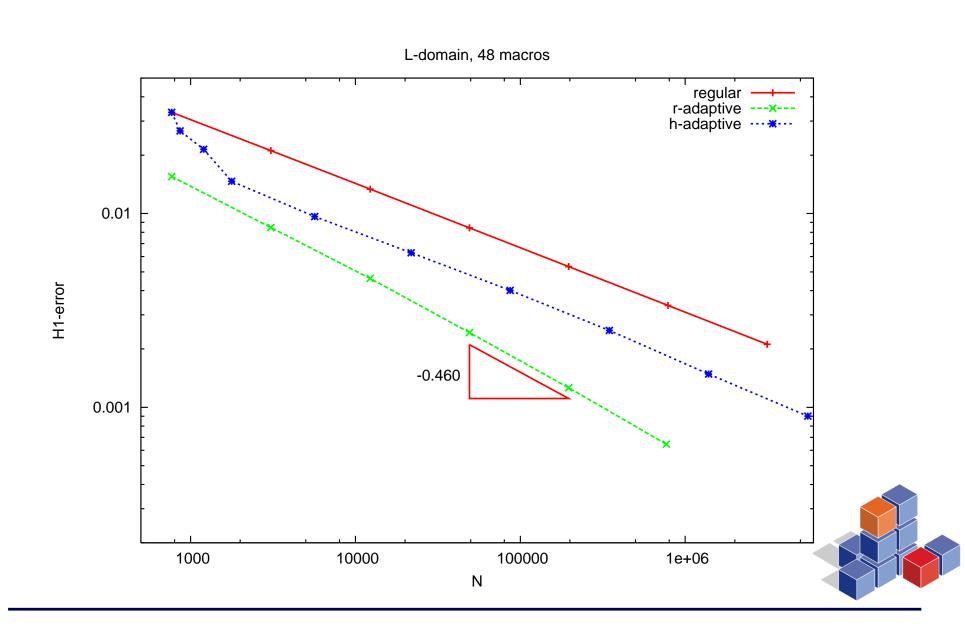


# Gitter an einspringender Ecke





# **Fehlerkonvergenz**



## Zusammenfassung

- HPC: lokal strukturierte Gitter
- Deformationsmethode: Herleitung und Konvergenzuntersuchung
- Mehrgitterdeformation
- Testbeispiel L-Gebiet: r-Adaptivität



# Vielen Dank für ihre Aufmerksamkeit

