

Ein dG-FEM-Verfahren zur Lösung der Konvektions-Diffusionsgleichung mit Hilfe von Mehrgitterverfahren

C. Kühbacher, M. Möller, S. Turek

Institut für Angewandte Mathematik (LS 3), TU Dortmund

Kurzfassung

Dieser Beitrag des Teilprojekts B7 gibt eine Übersicht über die Fortschritte in der Entwicklung numerischer Algorithmen zur Simulation von Strömungsprozessen innerhalb des Thermischen Spritzens. Die Konvektions-Diffusionsgleichung, welche als einfache Modelgleichung für die mathematische Grundlagenforschung dient, wird mit einem dG-Verfahren diskretisiert und mit Hilfe eines effizienten Mehrgitteralgorithmus gelöst. Das Hauptaugenmerk wurde hierbei auf den Löser gerichtet, da bei dG-Verfahren sonst meist Standardlöser zum Einsatz kommen.

Stichwörter: dG-FEM-Verfahren, Mehrgitterlöser

1 Einleitung

Im letzten Jahr wurde ein implizites discontinuous Galerkin Finite Elemente Verfahren (dG-FEM) zur Lösung der Eulergleichungen der Gasdynamik entwickelt [6]. Dabei wurde festgestellt, dass das verwendete BiCGStab-Verfahren zur Lösung der auftretenden linearen Gleichungssysteme nicht effizient genug ist und bessere lineare Löser entwickelt werden müssen, um praxisrelevante Problemstellungen simulieren zu können. Als eine effiziente Alternative bieten sich geometrische Mehrgitterverfahren an, welche eine lineare Abhängigkeit der Rechenzeit von der Anzahl der Freiheitsgrade bieten. Um diese zu entwickeln und zu testen, haben wir uns zunächst auf die skalare Konvektions-Diffusionsgleichung beschränkt. Diese enthält bis auf nichtlineare Kopplung mehrerer Variablen alle wichtigen Effekte, welche bei der Simulation einer Gasströmung eine Rolle spielen, d.h. insbesondere Terme erster und zweiter Ableitungen.

Die Mehrzahl der in der Literatur beschriebenen dG-Verfahren verwendet konventionelle Eingitterlöser, welche weniger effizient sind als ein Mehrgitteralgorithmus. Hinzu kommt, dass Mehrgitteralgorithmen meist für elliptische Gleichungen optimiert sind und Probleme bei der Lösung konvektionsdominanter Probleme haben.

Es wurde ein Löser entwickelt, der sowohl diffusionsdominante Probleme, welche auf eine symmetrische Matrix führen, als auch konvektionsdominante Probleme, die zu einer unsymmetrischen Matrix führen, effizient lösen kann.

2 Modellproblem und dG-Diskretisierung

Wir betrachten die Konvektions- Diffusionsgleichung

mit dem Diffusionskoeffizienten κ und dem Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} , welches als konstant vorausgesetzt wird. Die Randwerte ϕ_D müssen dabei auf dem ganzen Rand vorgegeben werden, außer bei reiner Konvektion (d.h. $\kappa = 0$). In diesem Fall muss ϕ_D nur auf dem Einflussteil des Randes vorgegeben werden.

Der diffusive Anteil der Gleichung wird mittels der symmetrischen interior penalty discontinuous Galerkin Methode [1] mit Nitsches schwachen Randbedingungen [2] diskretisiert. Sei \mathcal{T}_h die Menge der Elemente der Triangulation mit den inneren Kanten \mathcal{E}_h und den am Rand des Gebietes liegenden Kanten \mathcal{E}_h^b . Innerhalb eines einzelnen Elements $T \in \mathcal{T}_h$ ist die Lösung ein Polynom. Da jedoch keine Stetigkeitsanforderungen an die Lösung entlang einer Kante $E \in \mathcal{E}_h$ existieren, welche Teil der beiden Elemente $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$ ist, lassen sich der Mittelwert- und der Sprungoperator mit den äußeren Einheitsnormalenvektoren $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$, wie folgt definieren:

–

Außerdem definieren wir die Skalarprodukte

wobei ψ eine geeignete Testfunktion ist.

Zur Stabilisierung des Konvektionsteils wird ein Upwind-Fluss \mathcal{U}_E bezüglich des Geschwindigkeitsfelds \mathbf{u} verwendet. Für eine Kante $E \in \mathcal{E}_h$, welche an die beiden Elemente T_1 und T_2 grenzt, ist dieser definiert als

—

Liegt die Kante Γ am Rand, d.h. $\Gamma \in \partial\Omega$, so wird $\alpha_\Gamma = 0$ gesetzt.

Somit lässt sich die Konvektions-Diffusionsgleichung diskretisieren als

Dabei ist α_Γ der penalty Parameter [3], welcher für eine innere Kante Γ mit angrenzenden Elementen T_1, T_2 , definiert wird als

$$\alpha_\Gamma = \frac{1}{h_{T_1} + h_{T_2}}$$

mit dem Polynomgrad p_Γ der Ansatzfunktionen. Für eine Kante Γ am Rand, zu welcher das Element T gehört, definieren wir

$$\alpha_\Gamma = \frac{1}{h_T}$$

3 Der Löser

3.1 Glätter

Nachdem die lineare Konvektions-Diffusionsgleichung diskretisiert wurde, erhält man ein Gleichungssystem der Form

Um einen effizienten Löser zu erhalten, wird die Mehrgittermethode angewendet. Dabei werden die verschiedenen Frequenzen des Fehlers auf unterschiedlich feinen Gittern gedämpft, wobei sogenannte Glätter zum Einsatz kommen. Für die

reine Diffusionsgleichung gibt es verschiedene gute Glätter, z.B. ILU, Jacobi, Gauß-Seidel. Leider sind diese für konvektionsdominante Probleme weniger geeignet. Deswegen wurde ein Glätter verwendet, der auch für die reine Konvektionsgleichung funktioniert. Dieser ordnet die Gitterzellen nach einer Upwindnummerierung, d.h. eine Zelle mit niedrigerer Nummer liegt immer in Upwindrichtung vor einer Zelle mit höherer Nummer. Eine solche Nummerierung ist bei konstanten Charakteristiken und konvexen Gitterzellen immer möglich. Mit ihr ergibt sich für die reine Konvektionsgleichung eine untere Block-Dreiecksmatrix mit kleinen (von der Dimension des lokalen Ansatzraums) invertierbaren Blöcken auf der Hauptdiagonalen. Es kann dann ein blockweiser Gauß-Seidel-Löser mit der Anzahl der Blöcke zum Einsatz kommen, welcher in diesem Fall ein exakter Löser ist und sich vereinfacht zu

Wenn nicht die reine Konvektionsgleichung zum Einsatz kommt, sondern auch Diffusion hinzugefügt wird, ist dieser Löser nicht mehr exakt, aber die Störung ist entweder klein, oder die Diffusion wird dominant, so dass der Glätter für die Diffusionsgleichung die Gleichung gut lösen kann.

3.2 Konfiguration des Löasers

Wir benutzen einen BiCGStab [4] Löser mit einem F-Zyklus Mehrgitter [5] Vorkonditionierer, siehe dazu **Abb. 1**. Hierbei bezeichnet o Vor- bzw. Nachglätterschritte, Pfeile symbolisieren die Restriktion des Defekts von feineren zu gröberen Gittern bzw. die Prolongation der Grobgitterkorrektur auf das nächst feinere Gitter. Die Grobgitterprobleme \bullet wurden mittels eines direkten Löasers gelöst. Dabei wird vom größten Verfeinerungslevel des Gitters ($L = 1$) schrittweise immer ein Level feiner angegangen, um anschließend wieder zum größten Gitter zurückzukehren. Dies wird so lange wiederholt, bis das feinste Gitterlevel erreicht ist.

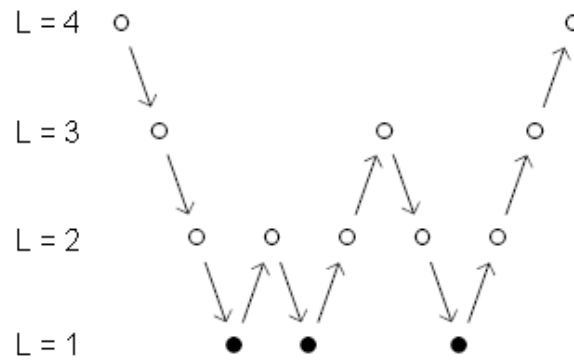


Abb. 1: Mehrgitter mit F-Zyklus auf 4 Leveln

Als Vorglätter kommt das Block Upwind Gauß Seidel Verfahren zum Einsatz (für die Konvektion) und als Nachglätter wird zweimal ILU benutzt (für die Diffusion). Der Löser stoppt, wenn das Residuum in der Euklidnorm um den Faktor reduziert wurde.

4 Numerischer Test

Um die Effizienz des entwickelten Mehrgitter-Verfahrens zu untersuchen, lösen wir die Konvektions-Diffusionsgleichung

für verschiedene Werte von ϵ und ν . Als Grobgitter kommt in jedem Fall das in **Abb. 2** dargestellte Vierecksgitter zum Einsatz.

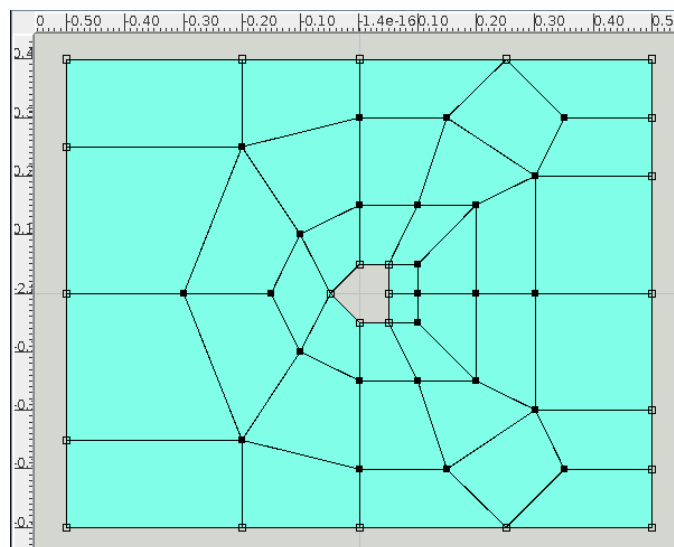


Abb. 2: Grobgitter

Das Hindernis in der Mitte besteht dabei zur Hälfte aus einem Kreis und zur anderen Hälfte aus einem Quadrat. Mit der rechten Seite

ergibt sich die analytische Lösung

Am Rand wird die exakte Lösung vorgeschrieben, d.h.

Zunächst wurde der Löser für die reine Diffusionsgleichung, d.h., getestet. Dabei ergaben sich für das dG bzw. das dG Element die folgenden Iterationszahlen, Fehler, sowie Konvergenzordnungen, abhängig vom maximalen Verfeinerungslevel des Gitters:

max Level	# MG It	L1-Fehler	Ord	L2-Fehler	Ord
2	5	7,34E-04	-	1,26E-03	-
3	5	1,95E-04	1,91	3,43E-04	1,88
4	6	5,06E-05	1,95	8,97E-04	1,94
5	6	1,29E-05	1,97	2,30E-05	1,96
6	7	3,26E-06	1,98	5,83E-06	1,98

Tab. 1: dG

max Level	# MG It	L1-Fehler	Ord	L2-Fehler	Ord
2	4	3,31E-05	-	6,01E-05	-
3	4	4,13E-06	3,00	7,63E-06	2,98
4	4	5,16E-07	3,00	9,58E-07	2,99
5	4	6,45E-08	3,00	1,20E-07	3,00
6	4	8,07E-09	3,00	1,50E-08	3,00

Tab. 2: dG

Es zeigt sich, dass die theoretisch erwarteten Konvergenzordnungen von 2 bzw. 3 erreicht werden und die Anzahl der Mehrgitteriterationen nur gering bzw. gar nicht vom maximalen Verfeinerungslevel des Gitters abhängt.

Anschließend wurde der Löser für die reine Konvektionsgleichung, d.h., getestet. Es ergaben sich die folgenden Ergebnisse:

max Level	# MG It	L1-Fehler	Ord	L2-Fehler	Ord
2	1	6,86E-04	-	1,17E-03	-
3	1	1,63E-04	2,07	2,98E-04	1,97
4	1	3,96E-05	2,04	7,48E-05	1,99
5	1	9,78E-06	2,02	1,88E-05	1,99
6	1	2,43E-06	2,01	4,70E-06	2,00

Tab. 3: dG ,

max Level	# MG It	L1-Fehler	Ord	L2-Fehler	Ord
2	1	2,89E-05	-	5,91E-05	-
3	1	3,49E-06	3,05	7,45E-06	2,99
4	1	4,30E-07	3,02	9,34E-07	3,00
5	1	5,31E-08	3,02	1,17E-07	3,00
6	1	6,57E-09	3,01	1,46E-08	3,00

Tab. 4: dG ,

Auch hier wurden die theoretisch erwarteten Konvergenzordnungen von 2 bzw. 3 erreicht. Da im reinen Konvektionsfall der Gauß Seidel Glätter ein direkter Löser ist, benötigt der Löser unabhängig vom Verfeinerungslevel des Gitters nur eine Iteration.

Betrachten wir als nächstes die Konvektions-Diffusionsgleichung mit sehr kleinen Abweichungen von der reinen Diffusions- bzw. der reinen Konvektionsgleichung.

Im diffusionsdominanten Fall — , ergaben sich die folgenden Werte:

max Level	# MG It	L1-Fehler	Ord	L2-Fehler	Ord
2	5	9,57E-04	-	1,50E-03	-
3	5	2,66E-04	1,85	4,16E-04	1,85
4	6	7,20E-05	1,89	1,12E-04	1,89
5	6	1,90E-05	1,92	2,94E-05	1,93
6	7	4,88E-06	1,96	7,56E-06	1,96

Tab. 5: dG —,

max Level	# MG It	L1-Fehler	Ord	L2-Fehler	Ord
2	4	3,64E-05	-	6,66E-05	-
3	4	4,27E-06	3,09	7,89E-06	3,08
4	4	5,22E-07	3,03	9,67E-07	3,03
5	4	6,48E-08	3,01	1,20E-07	3,01
6	4	8,08E-09	3,00	1,50E-08	3,00

Tab. 6: dG —,

Wie im reinen Diffusionsfall werden hier die Konvergenzordnungen von 2 bzw. 3 erreicht und es zeigt sich nur eine leichte bzw. keine Abhängigkeit von dem Verfeinerungslevel des Gitters.

Im konvektionsdominanten Fall — , ergaben sich die folgenden Werte:

max Level	# MG It	L1-Fehler	Ord	L2-Fehler	Ord
2	1	6,86E-04	-	1,17E-03	-
3	1	1,63E-04	2,07	2,98E-04	1,97
4	1	3,97E-05	2,04	7,48E-05	1,99
5	2	9,79E-06	2,02	1,88E-05	1,99
6	2	2,43E-06	2,01	4,69E-06	2,00

Tab. 7: dG —,

max Level	# MG It	L1-Fehler	Ord	L2-Fehler	Ord
2	1	2,90E-05	-	5,91E-05	-
3	1	3,49E-06	3,05	7,45E-06	2,99
4	2	4,31E-07	3,02	9,34E-07	3,00
5	2	5,33E-08	3,02	1,17E-07	3,00
6	3	6,64E-09	3,00	1,46E-08	3,00

Tab. 8: dG —,

Auch hier wurden wie im Falle reiner Konvektion die theoretisch erwarteten Konvergenzordnungen von 2 bzw. 3 erreicht, jedoch zeigt sich nun eine leichte Abhängigkeit der Anzahl der Mehrgitteriterationen vom Verfeinerungslevel des Gitters.

Für die reine Diffusions- bzw. Konvektionsgleichung, sowie leichte Abweichungen davon, zeigt der Löser seine Stärken. Im Zwischenbereich, in dem weder die Diffusions- noch die Konvektionseffekte dominieren, zeigen sich die Schwächen des konstruierten Mehrgitterverfahrens. Für — liefern beide

Elemente nicht optimale Konvergenzraten und auch die Abhängigkeit der Iterationszahlen vom Verfeinerungslevel des Gitters kommt stärker zum Tragen.

max Level	# MG It	L1-Fehler	Ord	L2-Fehler	Ord
2	2	6,92E-04	-	1,16E-03	-
3	3	1,71E-04	2,02	2,96E-04	1,97
4	5	4,52E-05	1,92	7,60E-05	1,96
5	6	1,28E-05	1,82	2,07E-05	1,88
6	7	3,79E-06	1,76	6,07E-06	1,77

Tab. 9: dG —,

max Level	# MG It	L1-Fehler	Ord	L2-Fehler	Ord
2	3	3,51E-05	-	6,43E-05	-
3	5	5,58E-06	2,65	9,86E-06	2,73
4	6	9,83E-07	2,51	1,68E-06	2,53
5	8	1,79E-07	2,46	3,11E-07	2,43
6	7	2,96E-08	2,60	5,23E-08	2,57

Tab. 10: dG —,

5 Ergebnisse

Der vorgestellte Mehrgitterlöser wurde in die am Lehrstuhl entwickelte Software FEATFLOW 2 [7] integriert. Er ist sehr effizient sowohl für konvektions- als auch für diffusionsdominante Probleme und zeigt dort die aus der Theorie erwartete Konvergenzordnung als auch eine geringe bis keine Abhängigkeit vom Verfeinerungslevel des Gitters. Allerdings ist er weniger effizient bei Problemen, bei denen konvektive und diffusive Effekte die Strömung in gleichem Maße beeinflussen. In diesem Bereich ist weder der ILU-Glätter noch der Block Upwind GS Glätter ideal. Hier kann vielleicht der Block Upwind GS Glätter noch verbessert werden, um auch diese Fälle besser abzudecken.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Das Modelproblem der Konvektions-Diffusionsgleichung wurde mittels eines dG-FEM-Verfahrens diskretisiert und es wurde ein effizienter Mehrgitterlöser entwickelt, der sowohl konvektions- als auch diffusionsdominante Probleme lösen kann. Dieser benutzt einen ILU-Nachglätter, um den Diffusionsanteil zu behandeln und einen Block Upwind GS Vorglätter, um den Konvektionsteil zu behandeln.

Der gezeigte Löser soll noch verbessert werden, um alle Kombinationen von Konvektion und Diffusion gleichgut abdecken zu können. Dies sollte durch eine Verbesserung des Block Upwind GS Glätters zu erreichen sein, der besser an den diffusiven Part des Problems angepasst werden sollte. Außerdem sollen die hier entwickelten Techniken möglichst übertragen werden, um einen effizienten Löser für die Eulergleichungen zu erhalten.

7 Danksagung

Diese Arbeit ist im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 708, TP B7 entstanden. Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Förderung.

Literatur

- [1] Arnold, D. N.: An interior penalty finite element method with discontinuous elements, SIAM J. Numer. Anal. 19 (4) 1982, 742-760.
- [2] Nitsche, J.: Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei der Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 36 1971, 9-17.
- [3] Kanschat, G: Discontinuous Galerkin Methods for Viscous Incompressible Flow, Teubner, Stuttgart 2007.
- [4] Van der Vorst, H.: Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems, SIAM J. Sci. Stat. Comput. 13 (2) 1992, 631-644.
- [5] Brandt, A.: Guide to Multigrid Development, Multigrid Methods, (Eds.) Hackbusch, W.; Trottenberg, U., Number 960 in Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1981, 220-312.
- [6] Möller, M.; Kühbacher, C.; Turek, S.: Ein implizites DG-FEM-Verfahren zur Lösung der kompressiblen Eulergleichungen, (Hrsg.) Tillmann, W.; Nebel, J.: Sonderforschungsbereich 708 4. Öffentliches Kolloquium, Dortmund, 2011, 139-148.
- [7] Softwarepaket: FEATFLOW 2. URL: www.featflow.de, 18.10.2012.