

Effiziente Diskretisierungs-und Lösungsmethoden für Lattice-Boltzmann Gleichungen

Charakteristiken-Upwind Diskretisierung auf beliebigen Dreiecksgittern und spezielle Numerierungstechniken



Lattice-Boltzmann vs.

Strahlungstransportgleichung

 $\frac{@t_i}{@t} + v_i \not \text{ or } f_i = i \frac{1}{2} (f_i i f_i^{eq}) ; \quad f_i^{eq} = w_i \frac{1}{2} [1 + \frac{3}{2} (v_i \not \text{ ou}) + \frac{9}{2} (v_i \not \text{ ou})^2 i \frac{3}{2} j u j^2]$

• Approximation der Dichte und Geschwindigkeit über $\frac{1}{2} = \frac{P}{i} f_i bzw. \frac{P}{2} = \frac{P}{i} f_i v_i$

• (Lineare) 2+1D-Strahlungstransportgleichung in ~ := - £ [0; 21/2) mit Einströmrand $Z_{21/4}$ $n_{\mu} \phi r_{x} u(x; \mu) + \cdot (x) u(x; \mu) = \cdot (x) R(\mu; \mu^{0}) u(x; \mu^{0}) d\mu^{0} + f(x) in - \infty$

$$u(x; \mu) = g(x; \mu) \quad \text{on } i$$

Mit Transport, Absorption, Streuung, Wiederverteilungs- und Quellfunktion



Allgemeine Diskretisierung der RTE (im Ordinatenraum)

- Diskretisiere Ordinatenraum und Integralterm (z.B. summierte Trapezregel)
- Ergibt semidiskretes gekoppeltes System an Differentialgleichungen
- Mit $u^{k}(x)$ » $u(x; \mu_{k}); !_{k}^{kj} = 2 / = K_{c} R(\mu_{k}; \mu_{i})$

$$n_{\mu^k} \ \phi r_x u^k(x) + \cdot (x) u^k(x) = \cdot (x) \sum_{j=1}^{K} !_K^{kj} u^j(x) + f(x) ; k = 1; : : ; K$$



Allgemeine Diskretisierung der RTE (im Ortsraum)

- Diskretisiere im Ort, z.B. mittels Finite Elemente/Volumen/Differenzen
- Ergibt diskretes gekoppeltes Gleichungssystem
- Mit U_h^k Koeffizientenvektor der Lösung u_h^k

$$\begin{split} T_h^k U_h^k + M_h^i U_h^k &= \underbrace{ \begin{array}{c} X^K \\ ! \ K^j M_h^i U_h^j + B_h \end{array} }_{j=1} ; \quad k=1;\ldots;K \\ &= \underbrace{ \begin{array}{c} 2 \\ T_h^1 \\ 0 \end{array} }_{j=1} \underbrace{ \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 0 \end{array} }_{j=1} \underbrace{ \begin{array}{c} 2 \\ M_h^i \\ 0 \end{array} }_{j=1} \underbrace{ \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 0 \end{array} }_{j=1} \underbrace{ \begin{array}{c} 3 \\ M_h^i \end{array} }_{j=1} \underbrace{ \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 0 \end{array} }_{j=1} \underbrace{ \begin{array}{c} 3 \\ M_h^i \end{array} }_{j=1} \underbrace{ \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 0 \end{array} }_{j=1} \underbrace{ \begin{array}{c} 3 \\ M_h^i \end{array} }_{j=1} \underbrace{ \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 0 \end{array} }_{j=1} \underbrace{ \begin{array}{c} 3 \\ M_h^i \end{array} }_{j=1} \underbrace{ \begin{array}{c$$





Generalized Mean Intensity (GMI)

 Summiere gewichtete Intensitäten zur GMI, die nur ortsabhängige Informationen enthält

$$J(x) := c^{m}(P)I^{m}(x)$$

Ergibt semidiskretes System

$$n_{u^m} \phi r_x I^m(x) + \cdot (x) I^m(x) = (x) J(x) + f^m(x) ; m = 1; :::; M$$

Diskretes System mit Feinheitsgrad h





LGS mit impliziter Systemmatrix

• Aufsummieren der Gleichungen

$$c^{m}(P)I_{h}^{m} = c^{m}(T_{h}^{m})^{i} L_{h}J_{h} + c^{m}(T_{h}^{m})^{i} I_{h}^{m}$$

$$\sum_{j=1}^{m-1} \{z_{j}\} \qquad \sum_{j=1}^{m-1} \{z_{j}\} \qquad \sum_{j=1}^{m-1} \{z_{j}\} = i \cdot F_{h}^{m}$$

• Ergibt diskrete mean intensity Formulierung

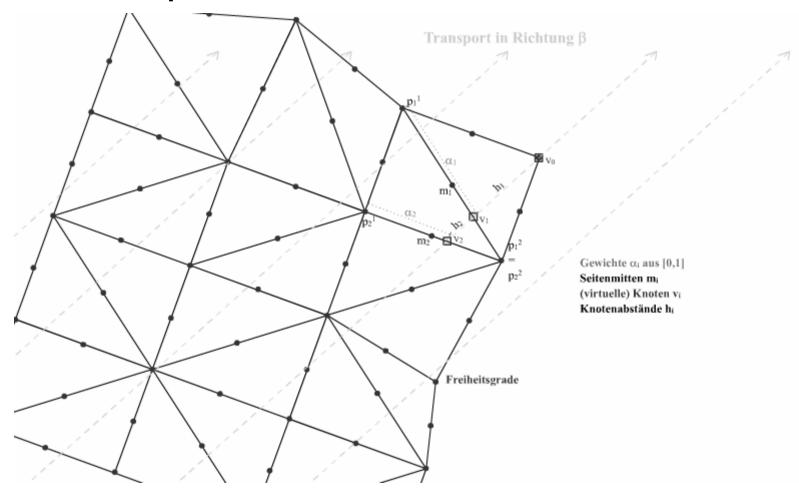
oita 6/22 Effizianta Dickraticiarunga und Lägungsmathadan für Lattiaa Paltzmann Glaichungan

Resultat:

- Speicherersparnis um Anzahl Richtungen
- spezifische Lösungen in einem Postprocess-Schritt



Transport auf unstrukturiertem Gitter







1D Vorgehen beim Transportproblem

$$-\diamondsuit_{\begin{subarray}{c} h_2\\ \begin{subarray}{c} h_2\\ \begin{subarray}{c} h_2\\ \begin{subarray}{c} h_2\\ \begin{subarray}{c} h_1\\ \begin{subarray}{c} ----\\ \begin{subarray}{c} h_2\\ \begin{subarra$$

• 2.Ordnung Upwinding Diskretisierung liefert (mit $h_1 + h_2 = r \phi h_1$)

$$- \phi r_{x} u(v_{0}) = u^{0}(v_{0}) = \frac{i (1 i r^{2})u(v_{0}) i r^{2}u(v_{1}) + u(v_{2})}{h_{1}(r^{2} i r)} + O(h_{1}; h_{2})^{2}$$

• Äquidistanter Fall ($h_1 = h_2$, r = 2) liefert wohlbekanntes Schema

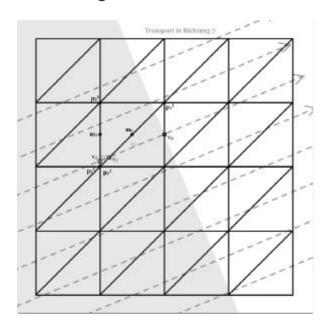
$$u^{0}(v_{0}) \approx \frac{3u(v_{0}) + 4u(v_{1}) + u(v_{2})}{2h_{1}}$$
 bzw. $u^{0}(v_{0}) \approx \frac{u(v_{0}) + u(v_{1})}{h_{1}}$

Ziel: Untere Dreiecksmatrizen für Transportprobleme => Direkte (mit O(NEQ) Aufwand) Lösung der Transportschritte

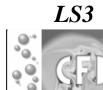


Untere Dreiecksmatrizen für Transportprobleme

Nichttriviales Problem der Knotennummerierung:
 (Schwierigkeiten bei naivem Vorgehen auf einfachsten Gittern)



Deswegen: Hilfsmittel aus Graphentheorie
 (Struktur der Differenzengleichungen als Graph behandelbar)





Topologischer Sortieralgorithmus

```
ORDER (QUEUE[*], INKNOTEN[*][*], OUTKNOTEN[*][*], NVT)
0. INIT:
i.) QUEUE[*] = 0, OUTDEG[*] = 0, k = 1
ii.) FOR EACH ENTRY IN OUTKNOTEN[i][*] DO OUTDEG[i]++
iii.) FOR EACH I WITH OUTDEG[i]= 0 DO I! QUEUE
1. DO WHILE k < NVT
a.) v=QUEUE[k]
b.) IF v=0 THEN OUTPUT 'Graph ist nicht kreisfrei', STOP!
c.) FOR EACH | IN INKNOTEN[v][*] DO:
```

e.) IF OUTDEG[j]=0THEN j! QUEUE f.) END FOR

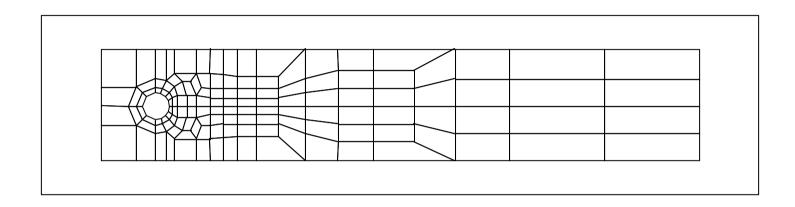
d.) OUTDEG[j]--

g.) k = k + 1





Tests mit Benchmarkkonfiguration



 Analytische (glatte) Lösung zur Fehleranalyse für verschiedene Richtungen, zum Beispiel

$$u(x) = u(x_1; x_2) = x_1(2:5; x_1)x_2(0:41; x_2)$$

11/22 Effizionto Dickroticiorungo und Löcungsmothodon für Lattica Paltzmann Claichungan





Laufzeitanalyse

 Initialisierungszeit (Erzeugen der Nummerierung) sowie Lösungszeit (Invertieren der Transportmatrizen) für 8 Winkel in Sekunden

				
NEQ	INIT-Time	SOLVER-Time	INIT-Time	SOLVER-Time
12992	5:00 ¢10 ⁱ ²	1:00 ¢10 ^{i 2}	8:00 ¢10 ^{i 2}	1:00 ¢10 ⁱ ²
50560	2:50 ¢10 ⁱ 1	3:00 ¢10 ^{i 2}	2:70 ¢10 ⁱ 1	4:00 ¢10i ²
199424	1:10 ¢10 ^{+ 0}	1:30 ¢10 ^{i 1}	1:31 ¢10 ^{+ 0}	2:50 ¢10 ⁱ 1
792064	5:53 ¢10 ^{+ 0}	8:00 ¢10 ^{i 1}	6:59 ¢10 ^{+ 0}	1:24 ¢10 ^{+ 0}
3156992	31:16 ¢10 ^{+ 0}	4:83 ¢10 ^{+ 0}	36:81 ¢10 ⁺⁰	6:59 ¢10 ^{+ 0}
12605440	174:40 ¢10 ^{+ 0}	26:15 ¢10 ^{+ 0}	208:51 ¢10 ⁺⁰	37:99 ¢10 ^{+ 0}





Fehleranalyse

UPW=1	Level 3	Level 4	Level 5	Level 6	Level 7
$0 (\cdot = 10^{i \cdot 2})$	8:40 ¢10 ⁱ ²	4:34 ¢10 ^{i 2}	2:21 ¢10 ⁱ ²	1:12 ¢10 ^{i 2}	5:62 ¢10 ^{i 3}
$0 (\cdot = 10^{+0})$	4:30 ¢10 ^{i 2}	2:22 ¢10 ^{i 2}	1:13 ¢10 ^{i 2}	5:68 ¢10 ^{i 3}	2:85¢10 ^{i 3}
$0 (\cdot = 10^{+2})$	9:90 ¢10 ⁱ ⁴	5:02 ¢10 ⁱ ⁴	2:54 ¢10 ⁱ ⁴	1:28 ¢10 ^{i 4}	6:40¢10 ^{i 5}
$135 (\cdot = 10^{i-2})$	1:87 ¢10 ^{i 1}	9:36 ¢10 ^{i 2}	4:68 ¢10 ^{i 2}	2:34 ¢10 ^{i 2}	1:17¢10 ^{i 2}
$135 (\cdot = 10^{+0})$	1:52 ¢10 ^{i 1}	7:63 ¢10 ⁻²	3:83 ¢10i ²	1:92 ¢10 ^{i 2}	9:60 ¢10 ^{i 3}
$135 (\cdot = 10^{+2})$	5:80 ¢10 ^{i 3}	2:93 ¢10 ^{i 3}	1:47 ¢10 ^{i 3}	7:39 ¢10 ^{i 4}	3:70 ¢10 ^{i 4}

UPW=2	Level 3	Level 4	Level 5	Level 6	Level 7
$0 (\cdot = 10^{j-2})$	9:00 ¢10 ^{i 4}	2:18 ¢10 ^{; 4}	5:29 ¢10 ^{i 5}	1:26 ¢10 ^{i 5}	2:88 ¢10 ^{i 6}
,	·	·	•	•	
$0 (\cdot = 10^{+0})$	8:16 ¢10 ^{; 4}	1:98 ¢10 ^{; 4}	4:83 ¢10 ^{i 5}	1:16¢10 ^{i 5}	2:67 ¢10 ^{i 6}
$0 (\cdot = 10^{+2})$	8:23 ¢10 ^{i 5}	2:17 ¢10 ^{i 5}	5:69 ¢10 ^{i 6}	1:48¢10 ^{i 6}	3:78 ¢10 ^{i 7}
$135 (\cdot = 10^{j-2})$	9:96 ¢10 ^{i 3}	2:33 ¢10 ⁻³	5:59 ¢10 ⁱ ⁴	1:36¢10 ⁱ ⁴	3:37 ¢10 ^{i 5}
$135 (\cdot = 10^{+0})$	8:25 ¢10 ^{i 3}	1:90 ¢10 ^{i 3}	4:48 ¢10 ^{i 4}	1:08 ¢10 ^{i 4}	2:65 ¢10 ^{i 5}
$135 (\cdot = 10^{+2})$	1:03 ¢10 ^{i 3}	3:04 ¢10 ⁱ ⁴	8:30 ¢10 ^{i 5}	2:09 ¢10 ^{i 5}	4:93 ¢10 ^{i 6}

• L2-Fehler für Upwind 1. und 2. Ordnung

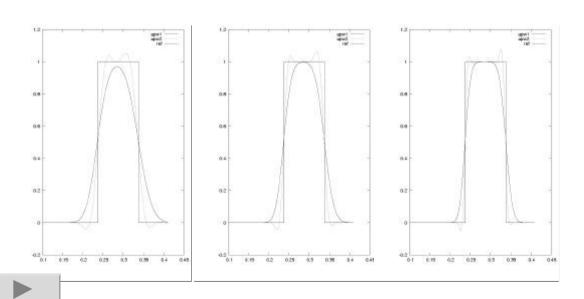




Typisches Verhalten bei Irregularität

- Test: Gebe charakteristische Lösung auf Randkomponente vor
 - => Unstetigkeit führt zu Oszillationen (2.Ordnung), Verschmieren (1. Ordnung)







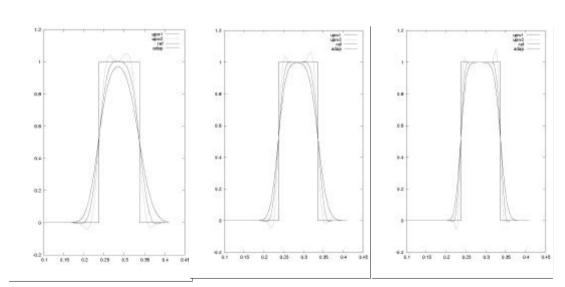


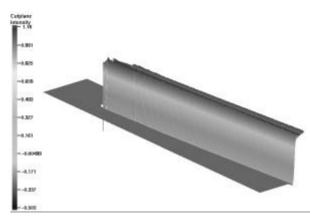


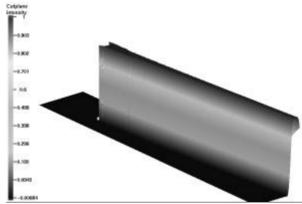
Adaptiver Ansatz

 Gewichtete Kombination der Diskretisierungen 1. und 2. Ordnung entsprechend "Steilheit" der approximierten Lösung =>Adaptives Upwind

ADPUPW = a*UPW1 + (1-a)*UPW2





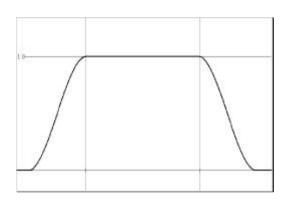


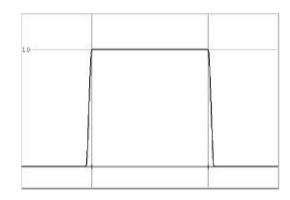




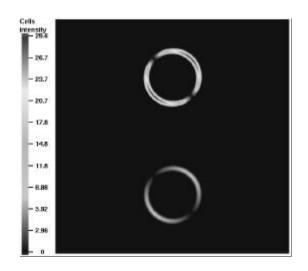
Verhalten bei steilen Gradienten

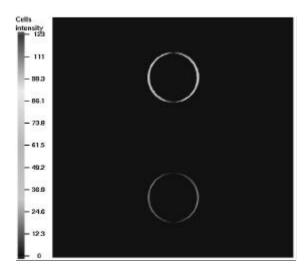
• "Modellproblem": steiler Anstieg auf kleinem ε Abschnitt

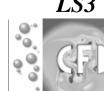




• Damit Gradient ca. 1/ε









Verlust von Genauigkeit und Asymptotik

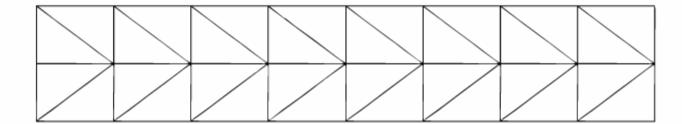
"	Level	UPW1	UPW2
	1. Lev	8; 64 ¢10 ⁱ ²	2; 06 ¢10 ⁱ ²
" = 0:05	2. Lev	4; 80 ¢10i ²	5; 73 ¢10 ^{i 3}
	3. Lev	2; 58 ¢10 ^{i 2}	1; 49 ¢10 ^{i 3}
	1. Lev	1; 78 ¢10i 1	2; 20 ¢10i ¹
" = 0:01	2. Lev	1; 11 ¢10 ^{i 1}	6; 68 ¢10 ^{i 2}
	3. Lev	6; 82 ¢10 ^{i 2}	1; 87 ¢10 ^{i 2}
	1. Lev	2; 64 ¢10 ⁱ 1	9; 36 ¢10 ⁱ 1
" = 0:005	2. Lev	1; 37 ¢10 ⁱ	2; 47 ¢10 ⁱ 1
	3. Lev	8; 44 ¢10 ^{i 2}	5; 47 ¢10 ^{i 2}
	1. Lev	9; 70 ¢10i 1	2; 51 ¢10 ⁰
" = 0:001	2. Lev	6; 50 ¢10 ⁱ 1	1; 79 ¢10 ⁰
	3. Lev	2; 14 ¢10 ⁱ 1	1; 18 ¢10 ⁰

Deswegen: Adaptive Gitter!





Adaptive Gitter

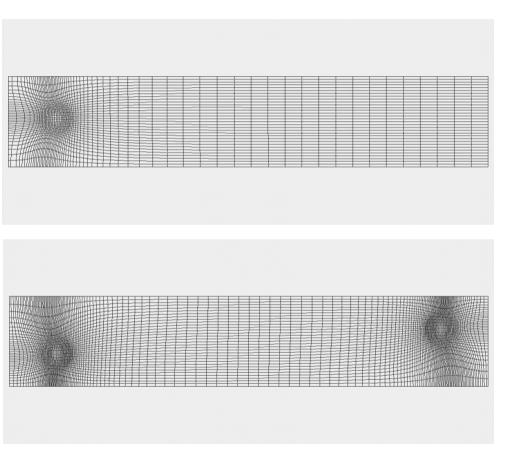


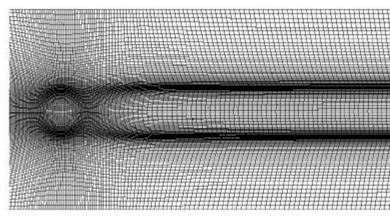






Gitterdeformation









Gewinn von Genauigkeit und Asymptotik

"	Level	UPW1	UPW2	UPW1	UPW2	UPW1	UPW2
	1. Lev	8; 64 ¢10 ^{i 2}	2; 06 ¢10 ⁱ ²	8; 77 ¢10 ⁱ ²	1; 12 ¢10 ⁱ ²	1; 20 ¢10 ⁱ 1	1; 92 ¢10 ⁱ ²
" = 0:05	2. Lev	4; 80 ¢10i ²	5; 73 ¢10i ³	4; 65 ¢10i ²	3; 37 ¢10i ³	6; 21 ¢10i ²	4; 05 ¢10 ⁱ ³
	3. Lev	2; 58 ¢10 ⁱ ²	1; 49 ¢10 ^{i 3}	2; 43 ¢10 ⁱ ²	9; 70 ¢10 ⁱ ⁴	3; 15 ¢10 ⁱ ²	1; 06 ¢10 ⁱ ³
	1. Lev	1; 78 ¢10 ⁱ	2; 20 ¢10 ⁱ 1	3; 52 ¢10 ⁱ ²	3; 44 ¢10 ⁱ ²	8; 74 ¢10 ^{i 2}	2; 23 ¢10 ⁱ ²
" = 0:01	2. Lev	1; 11 ¢10 ^{i 1}	6; 68 ¢10i ²	1; 86 ¢10i ²	2; 45 ¢10i ³	4; 46 ¢10i ²	2; 45 ¢10 ⁱ ³
	3. Lev	6; 82 ¢10 ⁱ ²	1; 87 ¢10 ⁱ ²	9; 81 ¢10 ^{i 3}	4; 87 ¢10 ⁱ ⁴	2; 28 ¢10 ⁱ ²	6; 37 ¢10 ⁱ ⁴
	1. Lev	2; 64 ¢10 ⁱ 1	9; 36 ¢10 ⁱ 1	4; 33 ¢10 ⁱ ²	7; 64 ¢10 ^{i 2}	2; 14 ¢10 ⁱ ²	1; 99 ¢10 ⁱ ²
" = 0:005	2. Lev	1; 37 ¢10i ¹	2; 47 ¢10i ¹	2; 32 ¢10i ²	5; 53 ¢10i ³	1; 17 ¢10i ²	2; 54 ¢10 ⁱ ³
	3. Lev	8; 44 ¢10 ^{i 2}	5; 47 ¢10 ⁱ ²	1; 24 ¢10 ⁱ ²	1; 21 ¢10 ^{i 3}	6; 48 ¢10 ^{i 3}	6; 58 ¢10 ⁱ ⁴
	1. Lev	9; 70 ¢10 ⁱ	2; 51 ¢10 ⁰	8; 34 ¢10 ⁱ ²	4; 26 ¢10 ⁱ	6; 51 ¢10 ^{i 2}	3; 80 ¢10 ⁱ 1
" = 0:001	2. Lev	6; 50 ¢10i ¹	1; 79 ¢10 ⁰	4; 38 ¢10i ²	1; 11 ¢10i ¹	2; 06 ¢10i ²	3; 90 ¢10i ²
	3. Lev	2; 14 ¢10 ⁱ 1	1; 18 ¢10 ⁰	2; 45 ¢10 ⁱ ²	1; 50 ¢10 ⁱ ²	8; 40 ¢10 ^{i 3}	9; 79 ¢10 ⁱ ³

Grosser Genauigkeitsgewinn bei moderat (mitte) und fein adaptiertem Gitter (rechts (bei vergleichbarem Rechenaufwand bzw. NEQ)



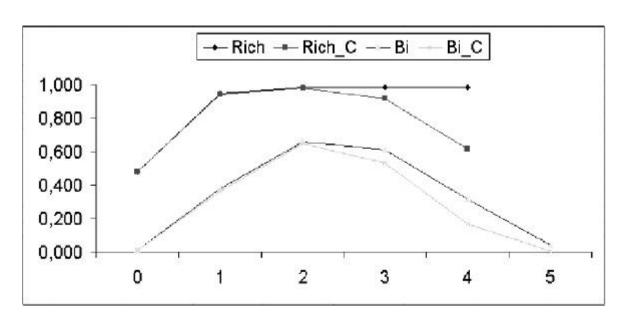
Lösung des nichtlinear gekoppelten **Systems**

Konvergenzrate abhängig von Verhältnis Absorption/Transport: 10ⁿ » - =n_u ¢r _x t

Iterative Lösungsmethoden erforderlich

(z.B. Richardson-Schema oder BiCG-Stab Verfahren)

Daher: Vorkonditionierung!







Iterationszahlen und Laufzeit

	$10^{\circ} = 10^{\circ}$,	$10^{\rm n} = 10^{\rm 1}$,	$10^{\circ} = 10^{\circ}$		$10^{\rm n} = 10^{\rm 3}$,	$10^{\circ} = 10^{4}$		$10^{\rm n} = 10^{\rm 5}$	
NEQ	UPW1	UPW2	UPW1	UPW2	UPW1	UPW2	UPW1	UPW2	UPW1	UPW2	UPW1	UP∖
4:056	6	6	17	18	58	66	79	81	66	77	25	61
3:640	6	6	18	19	60	70	91	84	70	91	47	4
9:416	6	6	19	20	66	70	89	89	76	87	55	7
4:056	6	6	12	16	33	51	44	86	32	66	16	27
3:640	6	6	15	17	43	64	57	96	46	79	22	36
9:416	6	6	17	18	47	73	66	99	62	101	32	49

- Oben: Iterationszahlen für Testrechnung (auf fein adaptiertem Gitter, ohne und mit Vorkonditionierung)
- Rechts: Ausgewählte Laufzeit pro Iterationsschritt (Lineare Entwicklung in Problemgröße bzw. NEQ)

	$10^{\rm n} = 10^2$	
NEQ	UPW1	UPW2
34:056	2; 2 ¢10 ^{i 2}	2; 9 ¢10 ⁱ 2
133:640	1; 2 ¢10 ⁱ	1;5 ¢10 ⁱ ´
529:416	5; 6 ¢10 ⁱ	7;3 ¢10 ⁱ ´
34:056	3; 0 ¢10 ^{i 2}	3; 8 ¢10 ⁱ
133:640	1; 6 ¢10 ⁱ	1;5 ¢10 ⁱ ´
529:416	7: 0 ¢10 ⁱ 1	6:3¢10i





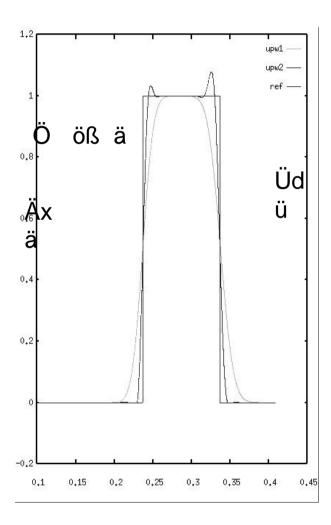
Zusammenfassung

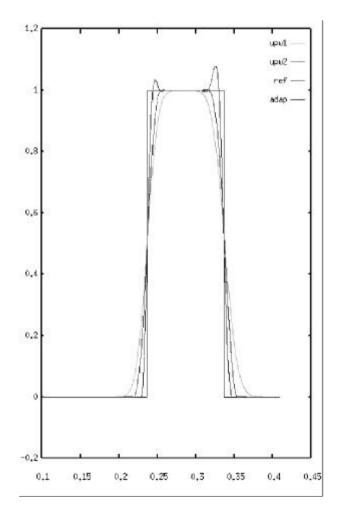
- Anwendung der Methoden aus Strahlungstransport auf LBE Statt z.B. 128 Winkel "nur" 9 Richtungen (in 2D) Wichtig: Direkte TransportLöser von hoher Ordnung
- Adaptive Gitter: Lokal unstrukturiert + Gitterdeformation
- Nichtlineare Kopplung der Richtungen → Newton + BiCG-Stab Frage: Mehrgitter notwendig?
- (Semi-)Implizite Zeitschrittverfahren → direkt stationärer Löser?
- Nummerierung stets möglich?
- Unstetigkeiten → Oszillationen bei 2. Ordnung Diskretisierung → Limiter

oita 22/22 Effizianta Dickraticiarunga und Lägungsmathadan für Lattiaa Paltzmann Glaiahungan

• Welche Regularität bei LBE?









Gitterdeformation

