Existenz und Eindeutigkeit exponentieller Ausgleichsfunktionen im Sinne des Relativen Fehlers mit einer Anwendung auf die Geburtenentwicklung

von Manfred Reimer*

Einführung

Viele Wachstumsprozesse können mithilfe einer einfachen Differentialgleichung, eventuell mit nacheilendem Argument, oder einer Integralgleichung modelliert werden, und oft tritt dabei eine Exponentialfunktion bei ihrer gesetzmäßigen Beschreibung auf. Unterliegt der Prozeß selbst statistischen Schwankungen, wie z. B. die kollektive Geburtenzahl in Deutschland, so ist es sinnvoll, die empirischen Daten mithilfe einer Exponentialfunktion im Sinne der Methode der kleinsten Fehlerquadrate von Carl Friedrich Gauß auszugleichen, um so den Trend zu bestimmen. Noch sinnvoller ist es indes, die Quadratsumme der relativen Fehler zu minimieren. Dies wirft die Frage nach der Existenz und der Eindeutigkeit der Lösung auf, die wir hier erörtern. Während die Existenz unter sachgerechten Voraussetzungen stets gesichert ist, entscheidet über die Eindeutigkeit die Frage, ob ein gewisses, hochgradiges Polynom nur eine einzige positive Nullstelle besitzt.

Die Ausgleichsfunktion

Wir betrachten den Fall, daß gewisse Wachstumsdaten

$$y_j > 0, \quad j = 0, \ldots, n,$$

mithilfe einer Exponentialfunktion

$$y(x) = ae^{\lambda x}, \tag{1}$$

$a > 0$, $-\infty < \lambda < +\infty$, bezüglich der relativen Fehler ausgeglichen werden soll. Mit $u := e^{-\lambda}$ ist also die Ausgleichsaufgabe

$$\Phi(u, a) := \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{y_j - y(j)}{y(j)} \right)^2 = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{y_j u^j}{a} - 1 \right)^2 \to \min, \quad 0 < u, a < \infty, \tag{2}$$

zu lösen.

Zur Existenz des Minimums

Da der Definitionsbereich in (2) offen ist, muß zunächst einmal die Existenz des Minimums nachgewiesen werden. Dazu betrachten wir $\Phi(u, a)$ zunächst bei festem $u > 0$ nur als Funktion von a. Eine notwendige Bedingung dafür, daß $\Phi(u, \cdot)$ bei a ein relatives Extremum annimmt, ist das Verschwinden der entsprechenden partiellen Ableitung, was mit

$$a = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n} y_j^2 u^{2j}}{\sum\limits_{j=0}^{n} y_j u^j}, \quad u > 0, \tag{3}$$

äquivalent ist. Diese Stelle $a = a(u)$ ist also eindeutig bestimmt, und es gilt

$$0 \leq \Phi(u, a(u)) = n + 1 - \frac{(\sum\limits_{j=o}^{n} y_j u^j)^2}{\sum\limits_{j=o}^{n} y_j^2 u^{2j}} < n + 1. \tag{4}$$

Dabei gilt links das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $y_j = const \cdot u^j$ für $j = 0, 1, \ldots, n$ gilt, die Daten also selber schon ein strenges exponentielles Gesetz erfüllen und somit des Ausgleichs gar nicht bedürfen.

Im übrigen gilt

$$\begin{aligned} \lim_{a \to 0+} \Phi(u, a) &= +\infty, \\ \lim_{a \to +\infty} \Phi(u, a) &= n + 1, \end{aligned}$$

was zusammen mit (4) besagt, daß das Minimum

$$\min \{\Phi(u, a) | \, 0 < a < \infty\}$$

existiert und an der Stelle $a = a(u)$ angenommen wird.

Wir fragen weiter, ob $\Phi(u, a(u))$ seinerseits ein Minimum hat, und betrachten $\Phi(u, a(u))$ dazu zunächst in einer Umgebung von $u = 0+$ und von $u = +\infty$. Offenbar gilt

$$\begin{aligned} \frac{(\sum\limits_{j=0}^{n} y_j u^j)^2}{\sum\limits_{j=0}^{n} y_j^2 u^{2j}} &= \frac{(y_0 + y_1 u + \cdots)^2}{y_0^2 + y_1^2 u^2 + \cdots} = 1 + 2\,\frac{y_1}{y_0}\,u + \mathcal{O}(u^2) \text{ für } u \to 0+, \\ \frac{(\sum\limits_{j=0}^{n} y_j u^j)^2}{\sum\limits_{j=0}^{n} y_j^2 u^{2j}} &= \frac{(y_n + y_{n-1}\frac{1}{u} + \cdots)^2}{y_n^2 + y_{n-1}^2 \frac{1}{u^2} + \cdots} = 1 + 2\,\frac{y_{n-1}}{y_n}\,\frac{1}{u} + \mathcal{O}(\frac{1}{u^2}) \text{ für } u \to +\infty. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich aus (4)

$$\begin{aligned} \Phi(u, a(u)) &= n - 2\,\frac{y_1}{y_0}\,u + \mathcal{O}(u^2) \text{ für } u \to 0+, \\ \Phi(u, a(u)) &= n - 2\,\frac{y_{n-1}}{y_n}\,\frac{1}{u} + \mathcal{O}(\frac{1}{u^2}) \text{ für } u \to +\infty, \end{aligned}$$

und man erkennt, daß auch $\Phi(u, a(u))$ sein Infimum annimmt, etwa an der Stelle u^*, $0 < u^* < \infty$. Setzt man $a^* := a(u^*)$, so gilt also

$$\Phi(u^*, a^*) = \min\{\Phi(u, a(u)) | \, 0 < u < \infty\} \leq \Phi(u, a)$$

für alle $u, a > 0$, und es existiert sogar das folgende Minimum:

$$\Phi(u^*, a^*) = \min\{\Phi(u, a) | \, 0 < u < \infty\}.$$

Die Ausgleichsaufgabe hat also eine Lösung.

Eindeutigkeit

Das Minimum von $\Phi(u, a)$ wird bei festem u an der einzigen Stelle $a = a(u)$ angenommen. Die Eindeutigkeit der Lösung der Ausgleichsaufgabe ist damit aber keinesfalls gesichert.

Tatsächlich haben wir bisher in (3) auch nur die Bedingung benutzt, daß die partielle Ableitung nach a verschwindet. Im weiteren gelte das auch für die partielle Ableitung nach u. Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$a = \frac{\sum_{j=0}^{n} j \, y_j^2 u^{2j}}{\sum_{j=0}^{n} j \, y_j u^j}, \quad u > 0, \tag{5}$$

die zusätzlich zu (3) erfüllt sein muß. Unter der Bedingung (3) ist (5) jedoch äquivalent zu

$$\frac{\sum_{j=0}^{n} y_j^2 u^{2j}}{\sum_{j=0}^{n} y_j u^j} = \frac{\sum_{j=0}^{n} j \, y_j^2 u^{2j}}{\sum_{j=0}^{n} j \, y_j u^j}, \quad u > 0, \tag{6}$$

beziehungsweise zu

$$G(u) = 0, \quad u > 0, \tag{7}$$

mit

$$G(u) := \sum_{j=0}^{n} y_j^2 u^{2j} \cdot \sum_{j=0}^{n} j \, y_j u^j \; - \; \sum_{j=0}^{n} j \, y_j^2 u^{2j} \cdot \sum_{j=0}^{n} y_j u^j.$$

Das Polynom $G(u)$ hat den Grad $3n$ und hat, da die Ausgleichsaufgabe eine Lösung besitzt, mindestens eine positive Nullstelle, zum Beispiel u^*. Hat $G(u)$ keine weitere positive Nullstelle, so beschreibt das Paar (u^*, a^*) die einzige Stelle, an der $\Phi(u, a)$ sein Minimum annimmt, so daß die Ausgleichsaufgabe eine eindeutig bestimmte Lösung hat. Im allgemeinen ist Eindeutigkeit jedoch nicht zu erwarten. Wir weisen sie allerdings nach für den Fall, daß die Daten nicht zu weit von einem strengen exponentiellen Gesetz abweichen.

Dazu setzen wir zunächst voraus, daß die Daten strikt das Gesetz

$$y_j = c \cdot q^j, \quad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{8}$$

für ein $q > 0$ und ein $c > 0$ erfüllen. Dann gilt mit $x := q \cdot u$

$$G(u) = c^3 \cdot x \cdot F(x)$$

mit

$$F(x) := \sum_{j=0}^{n} x^{2j} \cdot \sum_{j=0}^{n} j x^{j-1} - x \cdot \sum_{j=0}^{n} j x^{2j-2} \cdot \sum_{j=0}^{n} x^j.$$

Im Sinne der Polynomalgebra gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} x^j &= \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, \\ \sum_{j=0}^{n} j x^{j-1} &= \frac{n x^{n+1} - (n+1) x^n + 1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$F(x) = \frac{x^{2n+2}-1}{x^2-1} \cdot \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} - \frac{n x^{2n+3} - (n+1) x^{2n+1} + x}{(x^2-1)^2} \cdot \frac{x^{n+1}-1}{x-1},$$

wobei sich alle Nenner heben. Man formt dies weiter um zu

$$\begin{aligned} F(x) &= \tfrac{x^{n+1}-1}{(x-1)^3(x+1)^2} \cdot \\ &\quad \{(x+1)(x^{n+1}+1)(n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1) - n x^{2n+3} + (n+1) x^{2n+1} - x\} \\ &= \tfrac{x^{n+1}-1}{(x-1)^3(x+1)^2} \cdot \{(n+1)(x^2-1)x^n - x^{2n+2} + 1\} \\ &= \tfrac{x^{n+1}-1}{(x-1)^2(x+1)} \cdot \{(n+1)x^n - \tfrac{x^{2n+2}-1}{x^2-1}\} \\ &= \tfrac{x^{n+1}-1}{(x-1)^2(x+1)} \cdot \textstyle\sum_{j=0}^{n} \{x^n - x^{2n-2j}\} \\ &= \tfrac{x^{n+1}-1}{(x-1)^2(x+1)} \cdot \textstyle\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \{(x^n - x^{2n-2j}) + (x^n - x^{2j})\}. \end{aligned}$$

Jetzt hat man zwei Fälle zu unterscheiden.

Man erhält für $n = 2m$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \tfrac{x^{n+1}-1}{(x-1)^2(x+1)} \cdot \textstyle\sum_{j=0}^{m} \{x^n(1 - x^{n-2j}) + x^{2j}(x^{n-2j} - 1)\} \\ &= -(x^2-1) \sum_{k=0}^{n} x^k \sum_{j=0}^{m} x^{2j} (\tfrac{x^{2(m-j)}-1}{x^2-1})^2 \\ &= -(x^2-1) \sum_{k=0}^{n} x^k \sum_{j=0}^{m} x^{2j} (\sum_{l=0}^{m-j-1} x^{2l})^2, \end{aligned}$$

und für $n = 2m+1$:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \tfrac{x^{2m+2}-1}{(x-1)^2(x+1)} \sum_{j=0}^{m} \{x^{2m+1}(1 - x^{2(m-j)+1}) + x^{2j}(x^{2(m-j)+1} - 1)\} \\
&= -(x-1) \sum_{k=0}^{m} x^{2k} \sum_{j=0}^{m} x^{2j} (\tfrac{x^{2(m-j)+1}-1}{x-1})^2 \\
&= -(x-1) \sum_{k=0}^{m} x^{2k} \sum_{j=0}^{m} x^{2j} (\sum_{l=0}^{2m-2j} x^l)^2.
\end{aligned}$$

In beiden Fällen gilt

$$F(x) = -(x-1) \cdot H(x)$$

mit einem Polynom $H(x)$ mit nichtnegativen Koeffizienten und $H(x) > 0$ für $x > 0$. $F(x)$ hat also bei $x = 1$ seine einzige positive Nullstelle, und diese ist einfach. Entsprechend hat $G(u)$ bei $u = \frac{1}{q}$ seine einzige positive Nullstelle, und auch diese ist einfach. Daraus kann man den folgenden Schluß ziehen:

Stört man die Daten (8) nur ein wenig, so hat $G(u)$ aufgrund der stetigen Abhängigkeit der Nullstellen von den Koeffizienten weiterhin eine einzige (einfache) positive Nullstelle. Die Ausgleichsaufgabe hat also eine eindeutig bestimmte Lösung.

Anwendung: Geburtenentwicklung in Deutschland

In unserer Arbeit [1] haben wir den Trend der amtlichen Geburtenzahlen für Deutschland der Jahre 1997 bis 2006, [2], durch quadratischen Ausgleich des relativen Fehlers ermittelt und die Abweichungen von diesem Trend in den Jahren 2007 bis 2009 untersucht. Dabei konnten wir feststellen, daß sich der vorangegangene Abwärtstrend von jährlich 2,02 Prozent in den Jahren 2007 bis 2009 sprunghaft vermindert hat – wahrscheinlich infolge 2006 eingeführter politischer Maßnahmen.

Literatur:

[1] Reimer, Manfred: Zur Entwicklung der Geburtenzahl in Deutschland. Dortmund 2011. Eingereicht. Siehe auch diese Homepage, Electronic publications No. 3.

[2] Das Statistische Bundesamt Deutschland: Das Statistische Jahrbuch (bis 2010).

Adresse:
Prof. em. Dr. Manfred Reimer
Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund
D-44221 Dortmund