Brownsche Bewegung, SoSe 2017 — Prof. Dr. I. Veselić, Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 1
Abgabe am 4.5.2017

Aufgabe 1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ und $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ Zufallsvariablen und $y_0 \in \mathbb{R}^k$. Weiter sei $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine faktorisierte Version der bedingten Erwartung $\mathbb{E}[X \mid Y]$, sprich, es gelte $\mathbb{E}[X \mid Y = y] = g(y)$ für $\mathbb{P}_Y$-fast alle $y \in \mathbb{R}^k$. Wir setzen voraus, dass das Ereignis $B_\varepsilon := \{|Y - y_0| \leq \varepsilon\}$ für alle $\varepsilon > 0$ positive Wahrscheinlichkeit hat und dass g in y_0 stetig ist. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}[X \mid |Y - y_0| \leq \varepsilon] \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} g(y_0),$$

wobei für Ereignisse $B \in \mathcal{A}$ mit positiver Wahrscheinlichkeit $\mathbb{E}[X \mid B] := \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B] / \mathbb{P}(B)$ sei.

Anmerkung: Die Definition von $\mathbb{E}[X \mid B]$ verallgemeinert die Formel $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A \cap B) / \mathbb{P}(B)$ für $A \in \mathcal{A}$, wie man mit der Wahl $X = \mathbb{1}_A$ erkennt.

Aufgabe 2. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X, X_0 \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $Y\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (S, \mathcal{S})$ eine Zufallsvariable mit Werten im Messraum $(S, \mathcal{S})$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) X_0 ist eine Version von $\mathbb{E}[X \mid Y]$.
(ii) X_0 ist $\sigma(Y)$-messbar, und für alle $g \in L^\infty(S, \mathcal{S}, \mathbb{P}_Y)$ gilt $\mathbb{E}[X \cdot g(Y)] = \mathbb{E}[X_0 \cdot g(Y)]$.

Aufgabe 3. Es seien X und Y zwei reellwertige Zufallsgrößen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit gemeinsamer Dichte $f\colon \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ bezüglich dem Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^2$. Wir notieren mit $f_Y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_Y(y) := \int_\mathbb{R} f(x, y)\,\mathrm{d}x$ die Randdichte von Y und setzen für $y \in \mathbb{R}$ mit $f_Y(y) > 0$

$$f_{X|Y=y}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_{X|Y=y}(x) := \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Weiter sei $\xi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar und $\mathbb{E}(|\xi(X)|) < \infty$. Zeigen Sie: Für $\mathbb{P}_Y$-fast alle $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}(\xi(X) \mid Y = y) = \int_\mathbb{R} \xi(x) f_{X|Y=y}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 4. Bekanntlich erzeugen Zufallsvariablen σ-Algebren. Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass es zu jeder σ-Algebra eine Zufallsvariable gibt, die sie erzeugt. Das ist gut zu wissen, wenn man über bedingte Erwartungen und Wahrscheinlichkeiten lieber in faktorisierter Form nachdenkt.

Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ ein Erzeuger der σ-Algebra $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{E})$. Wir setzen

$$X\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (\{0,1\}^\mathcal{E}, \mathcal{S}), \quad X(\omega) := (\mathbb{1}_F(\omega))_{F \in \mathcal{E}}$$

mit der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{S} := \mathcal{P}(\{0,1\})^{\otimes \mathcal{E}}$. Zeigen Sie $\sigma(X) = \mathcal{F}$. (Damit zeigen Sie insbesondere, dass X eine Zufallsvariable ist.)

Anmerkung: Oft gibt es einfachere Konstruktionen. Im Beispiel $\Omega = \biguplus_{n=1}^\infty A_n$, $\mathcal{E} := \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist $X(\omega) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in \{0,1\}^\mathcal{E} = \{0,1\}^\mathbb{N}$ mit der 1 an der Stelle k mit $\omega \in A_k$. Die Zufallsvariable $Y\colon \Omega \to \mathbb{N}$ mit $Y(\omega) = k$ für alle $\omega \in A_k$ erzeugt $\mathcal{F}$ auch.