Brownsche Bewegung, SoSe 2017

Prof. Dr. I. Veselić
Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 2
Abgabe am 11.5.2017

Aufgabe 1.

(a) Finden Sie (einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und) zwei *abhängige* Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ mit ($X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und)

$$\mathbb{E}[X \mid Y] = \mathbb{E}[X]. \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass alle Zufallsvariablen $X, Y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$, die (1) erfüllen, unkorreliert sind, also

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

(c) Finden Sie zwei unkorrelierte Zufallsvariablen $X', Y' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$, die (1) nicht erfüllen.

Aufgabe 2. Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit zwei unabhängigen Zufallsvariablen $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S, \mathcal{S})$, $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (T, \mathcal{T})$ und zwei σ-Algebren $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$.

(a) Sei zusätzlich $f : S \times T \to \mathbb{R}$ derart, dass $f(X, Y) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie für $\mathbb{P}_Y$-fast alle $y \in T$, dass

$$\mathbb{E}[f(X, Y) \mid Y = y] = \mathbb{E}[f(X, y)].$$

(b) Sei nun $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{G}$ unabängig von $\sigma(\mathcal{F}, \sigma(X))$. Beweisen Sie

$$\mathbb{E}[X \mid \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{G})] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}].$$

Tipp: Benutzen Sie das Prinzip der guten Mengen und studieren Sie

$$\mathcal{L} := \{A \in \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \mid \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A]\}.$$

Aufgabe 3. Sei wie in der Vorlesung I eine nicht leere Indexmenge und $(E, \mathcal{B})$ ein Meßraum. Für $i \in I$ und alle endlichen Teilmengen $J \sqsubset I$ seien $\pi_i : E^I \to E$, $\pi_J : E^I \to E^J$ und $\pi_i^J : E^J \to E$ die Projektionen oder Koordinatenabbildungen

$$\pi_i((e_j)_{j \in I}) := e_i, \quad \pi_J((e_j)_{j \in I}) := (e_j)_{j \in J}, \quad \pi_i^J((e_j)_{j \in J}) := e_i.$$

Wir definieren wie in der Vorlesung $\mathcal{F} := \sigma(\pi_i, i \in I)$ und $\widetilde{\mathcal{F}} := \sigma(\pi_J, J \sqsubset I)$, wobei die σ-Algebra auf E^J gegeben sein soll durch $\mathcal{B}^{\otimes J} := \sigma(\pi_i^J, i \in J)$.

(a) Beschreiben Sie für $J \sqsubset I$ die Zylindermengen in $\mathcal{B}^{\otimes J}$, die diese σ-Algebra erzeugen.
(b) Zeigen Sie $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}$.
(c) Was ist die Nach- und Vorteile der Definition von $\widetilde{\mathcal{F}}$ gegenüber $\mathcal{F}$?

Aufgabe 4.

(a) Sei $I := \mathbb{N}$ und $E := \{0, 1\}$. Für $J \sqsubset I$ sei $\mathbb{P}_J$ die Gleichverteilung auf E^J. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{P}_J)_{J \sqsubset I}$ eine konsistente Familie ist.

(b) Wir wählen jetzt $I := \mathbb{N}_0$ und $E := \mathbb{Z}^d$. Die Menge aller Pfade der Länge $n \in \mathbb{N}$ ist

$$S_n := \{(x_t)_{t \in \mathbb{N}_0, t \leqslant n} \mid x_0 = 0 \in \mathbb{Z}^d, \forall t \in \mathbb{N}, t \leqslant n\colon x_t \in \mathbb{Z}^d, |x_t - x_{t-1}| = 1\}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{P}_{\{0,\ldots,n\}}$ die Gleichverteilung auf S_n. Zeigen Sie, dass diese Wahrscheinlichkeitsmaße eindeutig eine konsistente Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen festlegen.

(c) Wir betrachten mit der Notation aus der vorigen Teilaufgabe nun im Fall $d = 2$ die selbstvermeidenden Pfade

$$\widetilde{S}_n := \{(x_t)_t \in S_n \mid \forall s, t \in \mathbb{N}, s, t \leqslant n, s \neq t\colon x_s \neq x_t\}$$

und die Gleichverteilung $\widetilde{\mathbb{P}}_{\{0,\ldots,n\}}$ auf $\widetilde{S}_n$. Zeigen Sie, dass diese nicht zu einer konsistenten Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen gehören.

Anmerkung: Der Existenzsatz von Kolmogorov gibt einem in den ersten beiden Teilaufgaben das Wahrscheinlichkeitsmaß zum unendlichfachen Münzwurf bzw. die Verteilung der symmetrischen Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$.