Brownsche Bewegung, SoSe 2017 | Prof. Dr. I. Veselić
Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 3
Abgabe am 18.5.2017

Aufgabe 1.

(a) In der Vorlesung wurde das äußere Maß zum Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert als $\mu^*(A) := \inf\{\mu(B) \mid B \in \mathcal{A}, A \subseteq B\}$. Die übliche Definition für das äußere Maß ist

$$\nu(A) := \inf\Big\{\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \mid A_n \in \mathcal{A}, A \subseteq \bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big\}$$

Zeigen Sie $\mu^* = \nu$ und erklären Sie, warum man oft mit der komplizierteren Version arbeitet.

(b) Beweisen Sie, dass für eine Menge $C \subseteq \Omega$ mit äußerem Maß $\mu^*(C) = 1$ und alle $A \in \mathcal{A}$ gilt, dass $\mu^*(C \cap A) = \mu(A)$.

(c) Vervollständigen Sie den Beweis des Satzes von Doob aus der Vorlesung.

Aufgabe 2. Poisson-Prozesse wurde in der Vorlesung über ihre Eigenschaften definiert. Wir nehmen in dieser Aufgabe an, dass wir einen stochastischen Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ haben, der (i) fast sicher in 0 startet und (ii) unabhängige sowie (iii) Poisson-verteilte Zuwächse $X_t - X_s \sim \mathrm{Poi}(\lambda(t-s))$, $s < t \in \mathbb{R}_+$, hat.

(a) Die Zuwächse erfüllen $X_u - X_s = (X_u - X_t) + (X_t - X_s)$ für $s < t < u \in \mathbb{R}_+$. Da die Zuwächse $X_u - X_t$ und $X_t - X_s$ unabhängig sind, muss die Verteilung von $X_u - X_s$ gleich der Faltung der Verteilungen von $X_u - X_t$ und $X_t - X_s$ sein. Rechnen Sie dies nach.
Anmerkung: Später in der Vorlesung wird gezeigt, dass diese Kompatibilität hinreichend für die Konsistenz der zugehörigen endlich-dimensionalen Verteilungen ist.

(b) Sei D die Menge der nicht-negativen dyadischen Zahlen. Zeigen Sie, dass es ein fast sicheres Ereignis Ω_1 gibt, so dass $X_t(\omega) \in \mathbb{N}_0$ und $X_s(\omega) \leqslant X_t(\omega)$ für alle $s < t \in D$ und alle $\omega \in \Omega_1$ gilt.

(c) Zeigen Sie weiter $\mathbb{P}(\Omega_2) := 1$ für $\Omega_2 := \bigcap_{t\in D} \bigcup_{s\in D, s>t} \{X_s = X_t\}$.

(d) Beweisen Sie, dass das Ereignis

$$\Omega_3 := \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{n2^n-1} \{X_{(j+1)/2^n} - X_{(j-1)/2^n} \leqslant 1\}$$

ebenfalls Wahrscheinlichkeit 1 hat.

(e) Wir definieren nun $Y_s(\omega) := \lim_{D\ni t\searrow s} X_t(\omega)$ für alle $s \in \mathbb{R}_+$ und $\omega \in \widetilde{\Omega} := \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$ und $Y_t(\omega) := 0$ für $\omega \notin \widetilde{\Omega}$. Argumentieren Sie, dass dieser Limes existiert, ganzzahlig ist, und dass $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto Y_t(\omega)$ für alle $\omega \in \widetilde{\Omega}$ rechtsstetig ist und nur Sprünge der Höhe 1 hat.

(f) Beweisen Sie, dass $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine Modifikation von $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ist.
Hinweis: Die Limiten stochastisch konvergenter Folgen fast sicher eindeutig.

Aufgabe 3.

(a) Wir betrachten einen Messraum $(E, \mathcal{B})$ und eine nicht leere Indexmenge I. Eine Menge $B \subseteq E^I$ heißt *abzählbar determiniert*, wenn es eine abzählbare Menge $S \subseteq I$ gibt so dass für alle $x \in B$ und $y \in E^I$ mit $x(t) = y(t)$ für alle $t \in S$ folgt, dass $y \in B$. Zeigen Sie, dass alle Mengen in der Produkt-σ-Algebra abzählbar determiniert sind.

(b) Sei nun E ein metrischer Raum, der mindestens zwei Punkte enthält, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ eine σ-Algebra und $\mathcal{C}$ die Menge der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}_+$ nach E. Beweisen Sie $\mathcal{C} \notin \mathcal{A}^{\otimes \mathbb{R}_+}$.