Brownsche Bewegung, SoSe 2017 | Prof. Dr. I. Veselić, Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 4
Abgabe am 24.5.2017
(Vorsicht: Mittwoch statt Donnerstag wegen Feiertag!)

Aufgabe 1. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, Ereignisse mit $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$. Zeigen Sie, dass es eine Zufallsgröße $n^* \colon \Omega \to \mathbb{N}_0$ gibt, so dass fast sicher keines der Ereignisse A_n mit $n \geqslant n^*$ eintritt.

Anmerkung: Mit dieser Aussage ist die Funktion $h = 2^{-n^*}$ aus dem Satz von Kolmogorov-Chentsov messbar.

Aufgabe 2. Es sei $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine standardisierte Brownsche Bewegung, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, und $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie nach, dass $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ mit $Y_t := x + \sigma X_t + \alpha t$ eine Brownsche Bewegung mit Start in x, Driftparameter α und Diffusionsparameter σ^2 ist.

Aufgabe 3. Es seien $\sigma_n \in (0, \infty)$ und $s_n^2 := \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$. Wir nehmen an, dass $s_n \to \infty$ und $\sigma_n/s_n \to 0$ für $n \to \infty$. Zu zeigen ist

$$\max\{\sigma_j/s_n \mid j \leqslant n\} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{1}$$

(a) Behandeln Sie zunächst den Fall $\sup\{\sigma_j \mid j \in \mathbb{N}\} < \infty$.

Wir nehmen nun $\sup\{\sigma_j \mid j \in \mathbb{N}\} = \infty$ an. Dann existiert eine monotone Teilfolge $(\sigma_{n_k})_k$ von Rekorden, rekursiv definiert durch

$$n_1 := 1, \quad n_{k+1} := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_k, \sigma_n > \sigma_{n_k}\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(b) Zeigen Sie (1).

Aufgabe 4.

(a) Zeigen Sie, dass jede σ-Algebra genau dann abzählbar erzeugt ist, wenn sie von einer reellwertigen Zufallsvariable erzeugt wird.
(b) Beweisen Sie weiter, dass die Borelsche σ-Algebra eines jeden polnischen Raumes abzählbar erzeugt ist.
(c) Zusatz: Zeigen Sie, dass es keine abzählbar unendliche σ-Algebra gibt.

Hinweis: Eine *Basis* für eine Topologie $\tau \subseteq \mathcal{P}(E)$ ist ein Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \tau$, für das gilt, dass

$$\forall U \in \tau, x \in U \colon \exists B \in \mathcal{E} \colon x \in B \subseteq U.$$

Man kann alle Mengen $U \in \tau$ als Vereinigung von Basismengen schreiben: $U = \bigcup_{B\in E, B\subseteq U} B$, und alle Vereinigungen von Basismengen sind in τ.

Anmerkung: Ein Messraum, dessen σ-Algebra abzählbar erzeugt ist, heißt *Borelscher Messraum.*