Brownsche Bewegung, SoSe 2017

Prof. Dr. I. Veselić
Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 5
Abgabe am 1.6.2017

Aufgabe 1. Es seien μ, ν zwei σ-endliche Maße auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\nu \ll \mu$. Zeigen Sie, dass ν dann eine Dichte bezüglich μ hat, sprich, dass der Satz von Radon-Nikodym gilt.

Aufgabe 2.

(a) Es sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}^n$ und $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ linear. Zeigen Sie, dass $Y := T \circ X$ wieder normalverteilt ist.

(b) Seien $X, Y\colon (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ unabhängige, zentrierte, $\mathbb{R}$-wertige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit endlicher Varianz $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) \in (0, \infty)$. Zeigen Sie: Es gilt $\mathbb{P}_X = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ dann und nur dann, wenn $Z := \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$ ebenfalls die Verteilung $\mathbb{P}_X$ besitzt.

Aufgabe 3. Es sei $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein reellwertiger Lévy-Prozess mit fast sicher stetigen Pfaden auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Wir zeigen in dieser Aufgabe, dass der Prozess dann normalverteilte Zuwächse haben muss. Dazu fixieren wir $t > 0$ und setzen für $j, n \in \mathbb{N}$

$$X_{n,j} := \Delta\big(B(tj/n) - B(t(j-1)/n)\big) \qquad \text{mit } \Delta(x) := x \cdot \mathbb{1}_{(-1,1)}(x).$$

(a) Argumentieren Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n X_{n,j} = B(t) - B(0)$ fast sicher.

(b) Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} n\,\mathbb{P}(|X_{n,1}| \geqslant \delta) = 0$ für alle $\delta > 0$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(\max_{j=1}^{n} |B(tj/n) - B(t(j-1)/n)| < \delta\big) = \exp\big(-\lim_{n\to\infty} n\,\mathbb{P}(|B(t/n) - B(0)| \geqslant \delta)\big).$$

(c) Folgern Sie $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_{n,1}] = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_{n,1} - \mathbb{E}[X_{n,1}]| > \delta) = 0$ für alle $\delta > 0$.

(d) In dieser Teilaufgabe nehmen wir $\liminf_{n\to\infty} n\,\mathrm{Var}(X_{n,1}) = 0$ an. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $B(t) - B(0)$ fast sicher konstant ist.

Deterministische Zufallsvariablen sind insbesondere normalverteilt mit Varianz 0. Deshalb sei ab jetzt $\liminf_{n\to\infty} n\,\mathrm{Var}(X_{n,1}) > 0$. Wir setzen $Y_{n,j} := \sqrt{n} X_{n,j}$, so dass $\liminf_{n\to\infty} \mathrm{Var}(Y_{n,1}) > 0$. Wir setzen weiter $\eta_n := \mathbb{E}[Y_{n,1}]$, $\sigma_n^2 := \mathrm{Var}(Y_{n,1})$ und $s_n^2 := \sum_{j=1}^n \mathrm{Var}(Y_{n,j}) = n\sigma_n^2$.

(e) Zeigen Sie, dass $Y_{n,j}$ eine Lyapunov-Bedingung erfüllt, nämlich

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{-3} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[|Y_{n,j} - \eta_n|^3] = 0.$$

Hinweis: Zerlegen Sie das Integral in $\{|X_{n,j} - \mathbb{E}[X_{n,j}]| \geqslant \delta\}$ und das Komplement davon.

Nach dem Satz von Lindeberg-Feller (bzw. einer Verallgemeinerung desselben auf ein Dreiecksschema) konvergiert $s_n^{-1} \sum_{j=1}^n (Y_{n,j} - \eta_n)$ in Verteilung gegen die Standardnormalverteilung, also für alle $a < b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(a < \sum_{j=1}^n \frac{Y_{n,j} - \eta_n}{s_n} < b\Big) = (2\pi)^{-1} \int_a^b \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

(f) Zeigen Sie, dass $B(t) - B(0)$ normalverteilt ist.

Hinweis: Etablieren Sie, dass die Folgen $(\eta_n\sqrt{n})_n$ und $(\sigma_n)_n$ entlang derselben Teilfolge beide einen Limes haben.