Brownsche Bewegung, SoSe 2017 | Prof. Dr. I. Veselić
Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 6
Abgabe am 8.6.2017

Aufgabe 1. Die Kovarianzfunktion $\Gamma\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ eines zentrierten Gaußprozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ erfülle für alle $t \geqslant s \geqslant 0$

$$\Gamma(s,s) + \Gamma(t,t) - 2\Gamma(s,t) \leqslant C(t-s)^\nu$$

mit zwei von s und t unabhängigen Konstanten $C, \nu > 0$. Zeigen Sie, dass es eine Version von $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ mit Hölder-stetigen Pfaden gibt und identifizieren Sie mögliche Hölder-Exponenten.

Aufgabe 2. Es seien X, X_j, $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariablen, und $X_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, C_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Weiter gelte $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X - X_n|^2] = 0$. Zeigen Sie, dass $X \sim \mathcal{N}(\mu, C)$ mit $\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n$ und $C = \lim_{n\to\infty} C_n$.

Aufgabe 3. Seien $X, Y\colon (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ unabhängig und in $\mathcal{L}^2$. Ziel dieser Aufgabe ist folgende Äquivalenz:

$$X, Y \text{ sind normalverteilt mit derselben Varianz} \iff X+Y \text{ und } X-Y \text{ sind unabhängig}$$

(a) Überlegen Sie sich, dass X und Y genau dann dieselbe Varianz haben, wenn $X+Y$ und $X-Y$ unkorreliert sind.
(b) Zeigen Sie die Implikation „ $\Longrightarrow$ “.

Für die Rückrichtung seien φ und ψ die charakteristischen Funktionen von $\tilde{X} := X - \mathbb{E}[X]$ bzw. $\tilde{Y} := Y - \mathbb{E}[Y]$.

(c) Zeigen Sie $\varphi(2t) = \varphi(t)^2\psi(t)\overline{\psi(t)}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und die analoge Aussage für ψ.
(d) Wir setzen $\alpha(t) := \frac{\varphi(t)\overline{\psi(t)}}{\varphi(t)\psi(t)}$ für $t \in \mathbb{R}$. Rechtfertigen Sie kurz die Schritte in der folgenden Rechnung ($t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$):

$$\alpha(t) = \alpha(t/2)^2 = \alpha(t/2^n)^{2^n} = \big(1 + t\alpha'(0)/2^n + o(t/2^n)\big)^{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{\alpha(0)=1} \exp(t\alpha'(0)) = 1$$

und schließen Sie auf $\varphi = \psi$.
(e) Wiederholen Sie den Trick aus (d) mit $\gamma(t) = \varphi(t)/\overline{\varphi(t)}$ und zeigen Sie so $\varphi(t) \in \mathbb{R}$ für $t \in \mathbb{R}$.
(f) Modifizieren Sie den Trick für φ und zeigen Sie, dass X normalverteilt ist.