Brownsche Bewegung, SoSe 2017

Prof. Dr. I. Veselić
Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 8
Abgabe am 22.6.2017

Aufgabe 1. Gegeben sei ein Vektor $v \in \mathbb{R}^d$. Man zeige, dass durch

$$k_{s,t}(x, B) := \delta_{x+(t-s)v}(B) \qquad (s, t \in \mathbb{R}_+, s \leqslant t, x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

eine zeitlich und räumlich homogene Markovsche Übergangsfamilie definiert wird und bestimme die zugehörige Faltungshalbgruppe $(\mu_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Wie viele Lévy-Prozesse (modulo Äquivalenz) mit dieser Faltungshalbgruppe gibt es? Beschreiben Sie die Pfade.

Aufgabe 2. Zu einem Messraum $(E, \mathcal{A})$ und einem Element $x_0 \in E$ betrachten wir den Messraum $(E', \mathcal{A}')$ mit $E' := E\backslash\{x_0\}$ mit der Spur-σ-Algebra $\mathcal{A}' := \{A \cap E' \mid A \in \mathcal{A}\}$.

(a) Weiter sei $k' \colon E' \times \mathcal{A}' \to [0, \infty]$ ein *Sub-Markov-Kern*, also ein Kern mit $k'(x, E') \leqslant 1$ für alle $x \in E'$. Zeigen Sie, dass es genau einen Markov-Kern $k \colon E \times \mathcal{A} \to [0, \infty]$ gibt, der k' auf folgende Weise fortsetzt: Für alle $x \in E'$ und alle $A \in \mathcal{A}'$ gilt $k(x, B) = k'(x, B)$, und es gilt $k(x_0, B) = \delta_{x_0}(B)$.

(b) Sei nun $(k'_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine Halbgruppe von Sub-Markov-Kernen bezüglich $\circ$ auf $E' \times \mathcal{A}'$ und k_t die Fortsetzung zu k'_t, $t \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass $(k_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine (stationäre) MFÜ ist.

Aufgabe 3. Sei $(k_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine stationäre MFÜ auf dem Messraum $(E, \mathcal{B})$. Ein Punkt $a \in E$ heißt *Absorptionspunkt*, wenn

(i) $\delta_a \circ k_t = \delta_a$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$

gilt. (Hier fassen wir δ_a als Kern $E \times \mathcal{B} \ni (x, B) \mapsto \delta_a(B)$ auf.)

(a) Zeigen Sie, dass jede der folgenden Bedingungen zu (i) äquivalent ist.

(ii) Für alle $t \geqslant 0$ und alle $f \in B^b$ gilt $(k_t f)(a) = f(a)$.
(iii) Für alle $t \geqslant 0$ und alle $f \in B^b$ mit $f(a) = 0$ gilt $(k_t f)(a) = 0$.

(B^b ist wie in der Vorlesung der Raum der beschränkten messbaren Funktionen auf E.)

(b) Zeigen Sie weiter, dass in Teil (b) von Aufgabe 2 dieses Blattes x_0 ein Absorptionspunkt für die MFÜ ist.

Aufgabe 4. Man beweise die Existenz und Eindeutigkeit einer stationären Markovschen Übergangsfamilie $(H_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ auf $\mathbb{R}^{d+1}$ mit folgender Eigenschaft. Für jede Borel-messbare Funktion $f \colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, jedes $(x, \tau) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ und alle $t > 0$ gilt

$$(H_t f)(x, \tau) = (2\pi t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\frac{|y|^2}{2t}} f(x + y, \tau - t) \,\mathrm{d}y.$$

Diese Halbgruppe heißt die *Halbgruppe der Wärmeleitung* in $\mathbb{R}^{d+1}$.