Prof. Dr. I. Veselić
Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 9
Abgabe am 29.6.2017

Aufgabe 1. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F} := \{A \in \mathcal{A} \mid \mathbb{P}(A) \in \{0,1\}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra ist und finden Sie eine reguläre Version der bedingten Verteilung $\mathbb{P}(\,\cdot \mid \mathcal{F})(\,\cdot\,)$.

Aufgabe 2. Wir betrachten die Erde als Kugel und parametrisieren sie (etwas unüblich) mit der geographischen Länge $\Theta \in [0, \pi)$ und der geographischen Breite $\Phi \in [-\pi, \pi)$. Die Menge $\{\Theta = \vartheta\}$ ist also ein kompletter Großkreis. Wird ein Punkt auf der Kugeloberfläche uniform verteilt ausgewählt, so werden die Länge Θ und die Breite Φ zu Zufallsvariablen. Man könnte erwarten, dass Φ gegeben Θ gleichverteilt auf $[0, \pi)$ ist. Tatsächlich ist dies aber nicht der Fall, wie wir hier ausrechnen. Zeigen Sie dazu:

(a) Die bedingte Verteilung von Φ gegeben $\Theta = \vartheta$ hat für fast alle $\vartheta \in [0, \pi)$ die Dichte $[-\pi, \pi) \ni \varphi \mapsto |\cos(\varphi)|/4$.
(b) Die bedingte Verteilung von Θ gegeben $\Phi = \varphi$ ist für fast alle $\varphi \in [-\pi, \pi)$ die Gleichverteilung auf $[0, \pi)$.

Aufgabe 3. Es sei E ein polnischer Raum und P, Q Wahrscheinlichkeitsmaße auf E mit $Q \ll P$. Weiter sei die Radon-Nikodym-Dichte $f := \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \leqslant c$ P-fast sicher beschränkt durch ein $c > 0$. Seien weiter X_n und U_n, $n \in \mathbb{N}$, unabhängige Zufallsvariablen so dass $X_n \sim P$ und U_n auf $[0, 1]$ gleichverteilt ist. Wir definieren $N := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid U_n \leqslant f(X_n)/c\}$ und $Y := X_N$. Zeigen Sie $Y \sim Q$.

Aufgabe 4. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Wir sind, für gegebenes $\varepsilon > 0$, interessiert am *Stetigkeitsmodul*

$$f_\varepsilon \colon \Omega \to [0, 1], \quad f_\varepsilon(\omega) := \sup_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{P}(a < X \leqslant a + \varepsilon \mid \mathcal{F})(\omega)$$

der Verteilungsfunktion der bedingten Verteilung von X gegeben $\mathcal{F}$, der uns sagt, wie sehr sich die bedingte Wahrscheinlichkeit von X gegeben $\mathcal{F}$ in Intervallen der Größe ε konzentrieren kann.

Da in der Definition von f_ε ein Supremum von überabzählbar vielen Zufallsvariablen genommen wird, müssen wir uns fragen, ob f_ε überhaupt messbar ist. Zeigen Sie die Messbarkeit von f_ε für eine reguläre Version der bedingten Wahrscheinlichkeit.