Brownsche Bewegung, SoSe 2017

Prof. Dr. I. Veselić
Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 10
Abgabe am 6.7.2017

Aufgabe 1. Es seien N Teilchen auf zwei verbundene Behälter verteilt. Zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$ wechselt ein aus allen Teilchen gleichverteilt zufällig ausgewähltes Teilchen den Behälter. Im mikroskopischen Modell notieren wir, welches Teilchen in welchem Behälter ist: $\Omega := \{0,1\}^N$, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$. Das makroskopische Modell notiert nur, wie viele Teilchen in Behälter 1 sind: $\Omega' := \{0, 1, \dots, N\}$, $\mathcal{A}' := \mathcal{P}(\Omega')$.

(a) Formalisieren Sie die Dynamik, indem Sie passende Markovkerne $k\colon \Omega \times \mathcal{A} \to [0,1]$ und $k'\colon \Omega' \times \mathcal{A}' \to [0,1]$ angeben.
(b) Wie hängen Ω und Ω' zusammen? Finden Sie eine Abbildung $\pi\colon \Omega \to \Omega'$, die $k(x, \pi^{-1}(B')) = k'(\pi(x), B')$ für alle $x \in \Omega$ und $B' \in \mathcal{A}'$ erfüllt.
(c) Geben Sie je eine stationäre Verteilung $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ bzw. $\mu'\colon \mathcal{A}' \to [0,1]$ an, die $\mu \circ k = \mu$ bzw. $\mu' \circ k' = \mu'$ erfüllt.

Aufgabe 2. Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(E, \mathcal{B})$ Messräume und $(\mathbb{P}^x, X_t)_{x \in E, t \in \mathbb{R}_+}$ eine Markovsche Prozessfamilie auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit Werten in $(E, \mathcal{B})$. Eine Menge $A \in \mathcal{B}$ wird *Absorptionsmenge* bezüglich des Prozesses genannt, wenn für alle $x \in A$ und alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt, dass $\mathbb{P}^x(X_t \in A) = 1$. Insbesondere heißt $a \in E$ *Absorptionspunkt*, wenn $\{a\}$ eine Absorptionsmenge ist.

(a) Man zeige: Ein Punkt $a \in E$ mit $\{a\} \in \mathcal{B}$ ist genau dann ein Absorptionspunkt bezüglich des Prozesses, wenn a ein Absorptionspunkt bezüglich der Halbgruppe (P_t) der Übergangswahrscheinlichkeiten ist, siehe Blatt 7, Aufgabe 3.

(b) Sei speziell $E = \mathbb{R}^{d+1}$ und $\mathcal{B} := \mathcal{B}(E)$, und ferner sei die Halbgruppe $(H_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ der Wärmeleitung die Halbgruppe der Übergangswahrscheinlichkeiten der gegebenen Markovschen Prozessfamilie, siehe Blatt 7, Aufgabe 4. Man zeige, dass $A_{t_0} := \mathbb{R}^d \times (-\infty, t_0]$ eine Absorptionsmenge bezüglich dieses Prozesses ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in I}$ ist genau dann ein Markov-Prozess bezüglich seiner kanonischen Filtration, wenn für alle $t \in I$ die σ-Algebren $\sigma(X_s, s \leqslant t)$ und $\sigma(X_s, s \geqslant t)$ bedingt auf $\sigma(X_t)$ unabhängig sind.

Aufgabe 4. Es sei $X := (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein (nicht notwendigerweise stationärer) stochastischer Prozess mit Zustandsraum $(E, \mathcal{B})$ und $Y_t := (X_t, t)$ für $t \in \mathbb{R}_+$. Der Prozess $Y := (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ hat den Zustandsraum $(E \times \mathbb{R}_+, \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ und heißt der *Raum-Zeit-Prozess* zu X oder *Homogenisierung* von X.

(a) Zeigen Sie, dass X genau dann ein Markov-Prozess ist, wenn Y ein Markov-Prozess ist.
(b) Zeigen Sie, dass Y stationär bzw. zeitlich homogen ist.