Brownsche Bewegung, SoSe 2017 | Prof. Dr. I. Veselić
Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 11
Abgabe am 13.7.2017

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Wenn ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in I}$ bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ ein Markov-Prozess ist, dann ist er auch ein Markov-Prozess bezüglich seiner kanonischen Filtration $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in I}$.

Aufgabe 2. Es sei $(X_t)_{t\in I}$ ein stationärer $\mathbb{R}$-wertiger Markov-Prozess mit Markov-Halbgruppe $(P_t)_{t\in I}$, die $P_t(-x,-B) = P_t(x,B)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $t \in I$ erfüllen. Zeigen Sie, dass der Prozess $(Y_t)_{t\in I}$ mit $Y_t := |X_t|$ für $t \in I$ ebenfalls Markovsch ist.

Hinweis: Man könnte versuchen, die elementare Markov-Eigenschaft für $(Y_t)_{t\in I}$ bezüglich der kanonischen Filtration von $(X_t)_{t\in I}$ zu beweisen.

Aufgabe 3. Sei $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein Lévy-Prozess mit Werten in $\mathbb{R}_+$ und Faltungshalbgruppe $(\eta_t)_{t\geqslant 0}$ sowie und $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein davon unabhängiger, homogener und stationärer Markov-Prozess mit Werten in $\mathbb{R}^d$ mit Markov-Halbgruppe $(P_t)_{t\geqslant 0}$ auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Für $\omega \in \Omega$ und $t \in \mathbb{R}_+$ sei $Y_t(\omega) = X_{N_t(\omega)}(\omega)$. Der stochastische Prozess $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ heißt *subordinierter Prozess*. Zeigen Sie, dass der subordinierte Prozess ein stationärer Markov-Prozess zur Halbgruppe $(P_t^{\eta_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ ist.

Aufgabe 4. Erstellen Sie eine Übersicht / Landkarte / Mindmap, die die Begriffe und Zusammenhänge um stochastische Prozesse, Markov- und Levy-Prozesse, MÜFen, Halbgruppen, Markov-Kernen, Faltungshalbgruppen, … darstellt.