Brownsche Bewegung, SoSe 2017 | Prof. Dr. I. Veselić, Dr. C. Schumacher

Hausaufgabe 12
Abgabe am 20.7.2017

Diese Hausaufgabe ist freiwillig und wird weder korrigiert noch bewertet.

Aufgabe 1. Es seien $X, X_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ unabhängige Zufallsvariablen.

(a) Zeigen Sie $\mathbb{P}(X \geqslant c) \leqslant \exp(-c^2/2)$ für $c \geqslant 1/\sqrt{2\pi}$.
(b) Zeigen Sie $\mathbb{P}(X \geqslant c) \sim \exp(-c^2/2)/\sqrt{2\pi c^2}$ für $c \to \infty$, also der Quotient der beiden Größen konvergiert gegen 1.
(c) Beweisen Sie $\limsup_{n\to\infty} X_n/\sqrt{\log n} = \sqrt{2}$ fast sicher.

Hinweis: Benutzen Sie die Borel-Cantelli-Lemmas für $2 \pm \delta$ anstelle von 2 für $\delta > 0$.

Aufgabe 2. Es sei $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine standardisierte eindimensionale Brownsche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{F}_t := \sigma(B_s; s \leqslant t)$ die kanonische Filtration sowie $\mathcal{G}_t := \sigma(B_s; s \geqslant t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, und $\mathcal{T} := \bigcap_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{G}_t$ die *Tail-σ-Algebra*.

(a) Geben Sie nicht-triviale Beispiele von Tail-Ereignissen.
(b) Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathcal{T}$ gilt $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$.
(c) Beweisen Sie, dass die Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *rekurrent* ist, also dass fast sicher für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Zeit $t > n$ existiert mit $B_t = 0$.

Aufgabe 3. Es sei $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine 1-dimensionale Brownsche Bewegung. Zeigen Sie für alle $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(\exists t \in (0,\varepsilon)\colon B_t = 0) > 0.$$

Aufgabe 4. Es sei $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung. Man zeige

$$\limsup_{t\searrow 0} \frac{|B_t|}{\sqrt{2t\log|\log t|}} = 1$$

fast sicher.

Anleitung: Nach Wahl einer auf der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^d$ dichten Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $|x| = \sup\{\langle x, e_n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.