Konzentrationsungleichungen

Übungsblatt 1

TU Dortmund, Sommersemester 2017

Prof. Dr. Ivan Veselić, Matthias Täufer

Übung 1 (4 Punkte)**.** *Sei X eine Zufallsvariable aus $L^2(\mathbb{P})$ und $M(X) \in \mathbb{R}$ ein Median (d.h. $\mathbb{P}(X \geq M(X)) \geq 1/2$ und $\mathbb{P}(X \leq M(X)) \geq 1/2$).*

i) Zeigen Sie, dass $M(X)$ die Funktion

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbb{E}|X - t|$$

minimiert.

In Aufgabe i) kann es hilfreich sein, die Aussage zunächst den Spezialfall eines Laplace-Modells (d.h. die Zufallsvariable nimmt endlich viele Werte an und die Wahrscheinlichkeit jedes Ergebnisses ist gleich) zu beweisen. Eine korrekte abgegebene Lösung für diesen Spezialfall wird mit $0 < n < m$ Punkten bewertet werden, wobei m die maximal mögliche Punktzahl in Teilaufgabe i) ist.

ii) Zeigen Sie

$$|\mathbb{E}(X) - M(X)| \leq \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Übung 2 (4 Punkte)**.** *In der Vorlesung wurde in einer Bemerkung erwähnt, dass "Momentenabschätzungen im Allgemeinen besser sind als Chernoffabschätzungen". Wir wollen diese Aussage nun präzisieren.*
Sei X eine nichtnegative Zufallsvariable und $t > 0$. Beweisen Sie, dass die kleinste Momentenschranke *kleiner gleich der* kleinsten Chernoffschranke *ist.*

$$\inf_{q \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(X^q) t^{-q} \leq \inf_{s>0} \mathbb{E}(\mathrm{e}^{s(X-t)}).$$

Abgabe und Besprechung am 25.04.2017 in der Übung.