Konzentrationsungleichungen

Übungsblatt 11

TU Dortmund, Sommersemester 2017

Prof. Dr. Ivan Veselić, Matthias Täufer

Übung 21 (4 Punkte)**.** *Seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}$ und $\mathbb{P}(X_i = k) = p_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \dots, n\}$. In der Vorlesung hatten wir die Anzahl verschiedener Werte in der Stichprobe $(X_1, \dots, X_n)$ definiert als*

$$Z(n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \neq X_1, \dots, X_i \neq X_{i-1}\}}$$

und deren Erwartungswert berechnet als

$$\mathbb{E}[Z(n)] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p_k)^{i-1} p_k.$$

Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z(n)]/n = 0$.

Übung 22 (4 Punkte)**.** *Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ und X_i, $i \in \mathbb{N}$ i.i.d. Zufallsvariablen, die gemäß $\mathbb{P}$ verteilt sind. Das* empirische Wahrscheinlichkeitsmaß P_n *ist definiert durch*

$$P_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \in A\}},$$

für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$). Wir haben gelernt, dass der Satz von Glivenko-Cantelli impliziert, dass für alle $\epsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{t\in\mathbb{R}} |P_n((-\infty, t]) - \mathbb{P}((-\infty, t])| \geq \epsilon) = 0$$

und fragen uns nun, ob das Supremum über das Mengensystem $\{(-\infty, t] \colon t \in \mathbb{R}\}$ durch ein Supremum über $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ersetzt werden kann. Genauer gesagt fragen wir uns, ob

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |P_n(A) - \mathbb{P}(A)| \geq \epsilon) = 0 \tag{1}$$

für alle $\epsilon > 0$ gelten kann.

a) Zeigen Sie, dass (1) im Allgemeinen nicht gilt.

b) Finden Sie ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$, für welches (1) gilt.

Abgabe und Besprechung am 04.07.2017 in der Übung.