Konzentrationsungleichungen

Übungsblatt 12

TU Dortmund, Sommersemester 2017

Prof. Dr. Ivan Veselić, Matthias Täufer

Übung 23 (4 Punkte)**.** *In der Vorlesung hatten wir bedingte Rademacher-Mittel kennengelernt: Seien $X_{i,j}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, d\}$ unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $[-1, 1]$ und seien ϵ_i, $i \in \{1, \dots, n\}$ Rademacher-Zufallsvariablen (gegenseitig und von den X_{ij} unabhängig).*
Wir schreiben $X_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,d})$ und $X^{(i)} := (X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$.
Das bedingte Rademacher-Mittel *war dann definiert worden als*

$$Z = f(X_1, \dots, X_n) := \mathbb{E}\left[\max_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k X_{k,j} \mid X_1, \dots, X_n\right].$$

Zeigen Sie, dass Z selbstbeschränkend ist. Genauer gesagt: finden Sie $Z_i = f(X^{(i)})$, so dass $0 \leq Z - Z_i \leq 1$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $\sum_{i=1}^{n} Z_i \leq Z$. Tipp: Verwenden Sie, wie in der Vorlesung angegeben

$$Z_i := \mathbb{E}\left[\max_{j=1}^{d} \sum_{k=1, k\neq i}^{n} \epsilon_k X_{k,j} \mid X^{(i)}\right].$$

Übung 24 (4 Punkte)**.** *a) Sei $\mathcal{G}$ die Klasse von Teilmengen $G \subset \mathbb{R}^2$ mit folgender Eigenschaft:*

$$(x, y) \in G, x' \leq x, y' \leq y \Rightarrow (x', y') \in G.$$

Skizzieren Sie zwei sinnvolle (nicht-triviale, also nicht $\emptyset$ oder $\mathbb{R}^2$) Beispiele für Elemente aus $\mathcal{G}$.

b) Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{R}^2$ und unabhängige, $\mathbb{R}^2$-wertige Zufallsvariablen $Z_1, \dots, Z_n$, die gemäß $\mathbb{P}$ verteilt sind, ist das empirische Maß P_n *definiert als*

$$P_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{Z_i}.$$

Finden Sie ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{R}^2$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\sup_{G\in\mathcal{G}} |P_n(G) - \mathbb{P}(G)| > \epsilon\right] = 0 \tag{1}$$

NICHT gilt.

c) Finden Sie ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{R}^2$, so dass (1) gilt (und beweisen Sie, dass (1) gilt).

Abgabe und Besprechung am 11.07.2017 in der Übung.