Konzentrationsungleichungen

Übungsblatt 3

TU Dortmund, Sommersemester 2017

Prof. Dr. Ivan Veselić, Matthias Täufer

Übung 5 (4 Punkte)**.** *Für eine Zufallsvariable X hatten wir die* momentenerzeugende Funktion $F(\lambda) = \mathbb{E}\left[e^{\lambda X}\right] \in [0, \infty]$, *die* kumulantenerzeugende Funktion $\psi(\lambda) := \ln F(\lambda)$ *und für $t > \mathbb{E}(X)$ die* Cramér-Transformierte $\psi^*(t) := \sup_{\lambda \geq 0} (\lambda t - \psi(\lambda))$ *definiert. Zeigen Sie:*

a) Existiert ein $\lambda_0 > 0$ so dass $F(\lambda_0) < \infty$, so gilt auch $F(\lambda) < \infty$ für alle $\lambda \in [0, \lambda_0]$.

b) Setze $b := \sup\{\lambda \geq 0 \colon F(\lambda) < \infty\}$. Dann ist ψ ist auf dem Intervall $(0, b)$

- *i) unendlich oft differenzierbar,*
- *ii) konvex,*
- *iii) strikt konvex, falls X nicht fast sicher konstant ist.*

c) Ist X eine zentrierte Zufallsvariable, so gilt zudem

- *i) $\psi : [0, b) \to \mathbb{R}$ ist $C^\infty([0, b))$,*
- *ii) $\psi(0) = 0$ und $\psi'(0) = 0$,*
- *iii) $\psi^*(t) = \sup_{\lambda \in (0,b)}(\lambda t - \psi(\lambda))$.*

Übung 6 (4 Punkte)**.** *Sei Y binomialverteilt mit Parametern (n, p), wobei $p \geq 1/2$. Zeigen Sie:*

$$\mathbb{P}\left(Y - np \geq n\epsilon\right) \leq e^{-\frac{n\epsilon^2}{2p(1-p)}}, \quad 0 < \epsilon < 1 - p.$$

Abgabe und Besprechung am 09.05.2017 in der Übung.