Konzentrationsungleichungen

Übungsblatt 5

TU Dortmund, Sommersemester 2017

Prof. Dr. Ivan Veselić, Matthias Täufer

Übung 9 (4 Punkte). *In der Vorlesung war die kumulantenerzeugende Funktion ψ_X der Zufallsvariable $X = Y - \mathbb{E}[Y]$, wobei Y eine gammaverteilte Zufallsvariable mit Parametern $a, b \geq 0$ war, berechnet und abgeschätzt worden als*

$$\psi_X(\lambda) = a(-\lambda b - \ln(1 - \lambda b)) \leq \frac{\lambda^2 \nu}{2(1 - c\lambda)} \quad \textit{für } \lambda \in (0, 1/c),$$

wobei $\nu = ab^2$ und $c = b$.
(Bemerkung: Die verwendete Abschätzung haben Sie als Formel (1) in Aufgabe 4 auf Übungsblatt 2 gezeigt.)

a) *Zeigen Sie:*

$$\sup_{\lambda \in (0, 1/c)} \left(t\lambda - \frac{\lambda^2 \nu}{2(1 - c\lambda)} \right) = \frac{\nu}{c^2} h_1 \left(\frac{ct}{\nu} \right),$$

wobei

$$h_1(u) = 1 + u - \sqrt{1 + 2u}.$$

b) *Zeigen Sie: $h_1(\lambda) \colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ ist strikt monoton wachsend.*

c) *Berechnen Sie die Inverse h_1^{-1} (oder rechnen Sie nach, dass die in der Vorlesung angegebene Funktion tatschlich die Inverse ist).*

Übung 10 (4 Punkte). *Eine Zufallsvariable X heißt* exponentialverteilt mit Parameter $a > 0$, *wenn ihre Verteilung die Dichte $a \cdot \mathrm{e}^{-ax}$, $x \geq 0$, hat. Eine Zufallsvariable Y heißt* sub-exponentialverteilt, *wenn ein $a > 0$ existiert, so dass für alle $\lambda \in (0, a)$ gilt:*

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda Y}] \leq \frac{1}{1 - \lambda / a}.$$

a) *Sei X exponentialverteilt mit Parameter a. Zeigen Sie, dass für alle $q \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\mathbb{E}[X^q] = \frac{q!}{a^q}.$$

b) *Sei Y sub-exponentialverteilt. Zeigen Sie, dass für jedes $q \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\mathbb{E}[X^q] \leq 2^{q+1} \frac{q!}{a^q},$$

wobei $a > 0$ die Konstante aus obiger Definition ist.

Abgabe und Besprechung am 23.05.2017 in der Übung.