Konzentrationsungleichungen

Übungsblatt 6

TU Dortmund, Sommersemester 2017

Prof. Dr. Ivan Veselić, Matthias Täufer

Übung 11 (4 Punkte)**.** *Sei* $\phi(u) := \mathrm{e}^u - u - 1$.

a) Zeigen Sie $\phi(u) \leq u^2/2$ *für* $u < 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni u \mapsto \begin{cases} u^{-2}\phi(u), & u \neq 0, \\ 1/2, & u = 0, \end{cases}$$

isoton ist.

c) In der Vorlesung war für unabhängige Zufallsvariablen mit endlicher Varianz und welche fast sicher Werte im Intervall $(-\infty, b]$ *annehmen, aus der Bennett-Ungleichung eine Variante der Bernstein-Ungleichung*

$$\mathbb{P}(S \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2(\nu + bt/3)}\right) \tag{1}$$

hergeleitet worden, wobei $S = \sum_{i=1}^n X_i - \mathbb{E}[X_i]$ *und* $\nu = \mathrm{Var}(S)$. *Leiten Sie die Ungleichung (1) nun direkt aus Satz 2.10 (allgemeinere Form der Bernstein-Ungleichung), bzw. aus Korollar 2.11 her.*

Übung 12 (4 Punkte)**.** *Inhalt dieser Aufgabe ist, einen leicht modifizierten Beweis der Bennett-Ungleichung durchzuführen. Sei* Y *eine zentrierte Zufallsvariable mit endlicher Varianz* ν_Y, *so dass* $Y \leq 1$ *fast sicher.*

a) Zeigen Sie, dass dann für $\lambda \geq 0$ *gilt:*

$$\psi_Y(\lambda) = \log(\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda X}]) \leq \log(1 + \nu_Y(\mathrm{e}^\lambda - \lambda - 1)),$$

indem Sie $\psi_Y(0)$ *und* $\psi'_Y(\lambda)$ *für* $\lambda > 0$ *untersuchen.*

b) Folgern Sie die Aussage der Bennett-Ungleichung, Satz 2.9 (Es genügt, die Abschätzung an $\psi_S(\lambda)$ *aus Satz 2.9 zu zeigen).*

Abgabe am 30.05.2017 in der Vorlesung. Die Übung am 30.05.2017 entfällt und wird am 06.06.2017 nachgeholt (am 06.06. beginnt die Übung bereits um 8:30 Uhr).