Konzentrationsungleichungen

Übungsblatt 6 - Lösungsskizze

TU Dortmund, Sommersemester 2017

Prof. Dr. Ivan Veselić, Matthias Täufer

Übung 11. *Sei* $\phi(u) := \mathrm{e}^u - u - 1$.

i) Zeigen Sie $\phi(u) \leq u^2/2$ *für* $u < 0$.

ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni u \mapsto \begin{cases} u^{-2}\phi(u), & u \neq 0, \\ 1/2, & u = 0, \end{cases}$$

isoton ist.

iii) In der Vorlesung war für unabhängige Zufallsvariablen mit endlicher Varianz und welche fast sicher Werte im Intervall $(-\infty, b]$ *annehmen, aus der Bennett-Ungleichung eine Variante der Bernstein-Ungleichung*

$$\mathbb{P}(S \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2(\nu + bt/3)}\right) \tag{1}$$

hergeleitet worden, wobei

$$S := \sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}[X_i] \quad \text{und} \quad \nu = \mathrm{Var}(S).$$

Leiten Sie die Ungleichung (1) *nun direkt aus Satz 2.10 (allgemeinere Form der Bernstein-Ungleichung), bzw. aus Korollar 2.11 her.*

Lösungsskizze. a) Äquivalent zu

$$\mathrm{e}^{-u} \leq 1 - u + u^2/2 \quad \text{for } u \geq 0.$$

Das ist klar bei $u = 0$. Differenziere:

$$-\mathrm{e}^{-u} \leq u - 1 \Leftrightarrow 1 \leq u + \mathrm{e}^{-u}$$

Das ist klar bei $u = 0$. Differenziere:

$$0 \leq 1 - \mathrm{e}^{-u}$$

Das ist offensichtlich wahr.

b) Die Funktion lässt sich als Potenzreihe entwickeln:

$$f(u) := u^{-2}\phi(u) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{u^q}{(q+2)!}.$$

Diese konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$, also ist die Funktion C^∞ und es genügt zu zeigen, dass $f' \geq 0$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Es ist

$$f'(u) = \frac{\mathrm{e}^u(u-2)+u+2}{u^3}.$$

- Ist $u > 0$, so müssen wir zeigen:

  $$\mathrm{e}^u(u-2)+u+2 \geq 0.$$

  Das ist klar bei $u = 0$. Differenziere:

  $$\mathrm{e}^u(u-2)+\mathrm{e}^u+1 \geq 0.$$

  Das ist klar bei $u = 0$. Differenziere

  $$\mathrm{e}^u(u-2)+2\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u u \geq 0.$$

  Das ist wahr für alle $u > 0$.
- Ist $u < 0$, so ist zu zeigen:

  $$\mathrm{e}^u(u-2)+u+2 \leq 0.$$

  Dies ist äquivalent zu

  $$\mathrm{e}^{-u}(-u-2)-u+2 \leq 0 \quad \forall u > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2-u \leq \mathrm{e}^{-u}(u+2) \quad \forall u > 0.$$

  Das ist klar bei $u = 0$. Differenziere:

  $$-1 \leq \mathrm{e}^{-u}(u+2)-\mathrm{e}^{-u} = \mathrm{e}^{-u}(u+1).$$

  Das ist wahr für alle $u > 0$.

c) Sei $X_i \leq b$ fast sicher. Wir wollen die Bedingungen aus Thm. 2.10 nachrechnen. Offenbar ist $\sum_i \mathbb{E}[X_i]^2 = \mathrm{Var}(S) = \nu \leq \nu$. Gilt

$$\mathbb{E}[(X_i)_+^q] \leq \frac{q!}{2}\nu c^{q-2} \quad \forall q \geq 3,$$

so folgt (mit Korollar 2.11)

$$\mathbb{P}(S \geq t) \leq \exp\left(\frac{-t^2}{2\nu + ct}\right)$$

Wir müssen also zeigen:

$$\mathbb{E}[(X_i)_+^q] \leq \frac{q!}{2}\nu(b/3)^{q-2} \quad \forall q \geq 3.$$

Nun ist

$$\mathbb{E}[(X_i)_+^q] \leq b^{q-2}\mathbb{E}[(X_i)^2] \leq \frac{3^{q-2}}{3^{q-2}}\nu b^{q-2} \leq \frac{q!}{2}\nu(b/3)^{q-2},$$

denn $3^{q-2} \leq q!/2$ für $q \geq 3$.

$\square$

Übung 12 (Blatt 6, Aufgabe 12)**.** *Inhalt dieser Aufgabe ist, einen leicht modifizierten Beweis der Bennett-Ungleichung durchzuführen. Sei Y eine zentrierte Zufallsvariable mit endlicher Varianz ν_Y, so dass $Y \leq 1$ fast sicher.*

a) Zeigen Sie, dass dann für $\lambda \geq 0$ gilt:

$$\psi_Y(\lambda) = \log(\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda Y}]) \leq \log(1 + \nu_Y(\mathrm{e}^\lambda - \lambda - 1)),$$

indem Sie $\psi_Y(0)$ und $\psi_Y'(\lambda)$ für $\lambda > 0$ untersuchen.

b) Folgern Sie die Aussage der Bennett-Ungleichung, Satz 2.9 (Es genügt, die Abschätzung an $\psi_S(\lambda)$ aus Satz 2.9 zu zeigen).

Lösungsskizze. a) Es genügt, zu zeigen:

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda Y}] \leq 1 + \nu_Y(\mathrm{e}^\lambda - \lambda - 1)$$

Für $\lambda = 0$ gilt Gleichheit, also genügt es, die Ungleichung für die Ableitungen zu zeigen:

$$\mathbb{E}[Y\mathrm{e}^{\lambda Y}] \leq \nu_Y(\mathrm{e}^\lambda - 1).$$

Nun ist für $k \geq 2$

$$\mathbb{E}[Y^k] \leq \mathbb{E}[Y^{k-2}\chi_{Y\geq 0}Y^2] \leq 1 \cdot \mathbb{E}[Y^2] \leq \nu.$$

Wir entwickeln die linke Seite als Reihe:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y\mathrm{e}^{\lambda Y}] &= \mathbb{E}[Y] + \lambda\mathbb{E}[Y^2] + \lambda^2\mathbb{E}[Y^3]/2! + \lambda^3\mathbb{E}[Y^4]/3! + \ldots \\ &= 0 + \nu(\lambda + \lambda^2/2! + \lambda^3/3! + \ldots) = \nu(\mathrm{e}^\lambda - 1).\end{aligned}$$

Das war zu zeigen.

b) Mit $\phi(\lambda) := \mathrm{e}^\lambda - \lambda - 1$, finden wir

$$\psi_S(\lambda) = \sum_{i=1}^n \nu_{Y_i}\phi(\lambda) \leq \sum_{i=1}^n \log(1 + \nu_{Y_i}\phi(\lambda)) \leq \sum_{i=1}^n \nu_{Y_i}\phi(\lambda) = \nu\phi(\lambda)$$

wobei Teil a) und $\log(1 + x) \leq x$ verwendet wurden. Dies zeigt die erste Aussage aus der Bennett-Ungleichung. Der Rest der Aussagen des Satzes zur Bennett-Ungleichung folgt komplett analog zum Beweis in der Vorlesung.

$\square$