Konzentrationsungleichungen

Übungsblatt 7

TU Dortmund, Sommersemester 2017

Prof. Dr. Ivan Veselić, Matthias Täufer

Übung 13 (4 Punkte). *In Satz 2.13 (Johnson-Lindenstrauss-Lemma) war für eine n-elementige Menge $A \subset \mathbb{R}^D$ unter Verwendung von Zufallsvariablen $X_{ij} \in \mathcal{G}(\nu)$, $i \in \{1, \ldots, d\}$, $j \in \{1, \ldots, D\}$, eine Abbildung $W : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^d$ konstruiert worden, so dass für*

$$d \geq 100 \frac{\nu^2}{\epsilon^2} \ln\left(\frac{n}{\sqrt{\delta}}\right) \tag{1}$$

gilt: $\mathbb{P}(W$ ist ϵ-Isometrie auf $A) \geq 1 - \delta$. Wir wollen nun im Fall $X_{ij} \sim \mathcal{N}(0,1)$ die Annahme (1) zu

$$d \geq \frac{16}{\epsilon^2} \ln\left(\frac{n}{\sqrt{\delta}}\right) \tag{2}$$

abschwächen.

a) *Definieren Sie für $\alpha \in \mathbb{R}^D$ mit $\|\alpha\| = 1$:*

$$\tilde{W}_i(\alpha) = \sum_{j=1}^{D} \alpha_j X_{ij}, \quad W(\alpha) = \left(\frac{1}{\sqrt{d}} \tilde{W}_i(\alpha)\right)_{i=1}^{d}.$$

Erklären Sie, warum $\sum_{i=1}^{d} (\tilde{W}_i(\alpha)^2 - 1)$ sub-gamma-verteilt mit Varianzfaktor $2d$ und Skalenparameter 2 ist.

b) *Zeigen Sie für $t > 0$, dass $\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{d} \left(W_i(\alpha)^2 - 1\right)\right| \geq 2\sqrt{dt} + 2t\right) \leq 2\mathrm{e}^{-t}$.*

c) *Folgern Sie*

$$\mathbb{P}\left(\|W(\alpha)\|^2 - 1| \geq 2\sqrt{\frac{\ln(n^2/\delta)}{d}} + 2\frac{\ln(n^2/\delta)}{d}\right) \leq 2\frac{\delta}{n^2}.$$

Übung 14 (4 Punkte). *(Fortsetzung der vorherigen Aufgabe)*

a) *Folgern Sie für eine N-elementige Teilmenge T der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^D$*

$$\mathbb{P}\left(\max_{\alpha \in T} \|W(\alpha)\|^2 - 1| \geq 2\sqrt{\frac{\ln(n^2/\delta)}{d}} + 2\frac{\ln(n^2/\delta)}{d}\right) \leq 2N\frac{\delta}{n^2}.$$

b) *Folgern Sie die Aussage des Johnson-Lindenstrauss-Lemmas unter der Annahme (2) im Fall $X_{ij} \sim \mathcal{N}(0,1)$.*

Abgabe am 06.06.2017 in der Übung.