Konzentrationsungleichungen

Übungsblatt 7

TU Dortmund, Sommersemester 2017

Prof. Dr. Ivan Veselić, Matthias Täufer

Übung 13. *In Satz 2.13 (Johnson-Lindenstrauss-Lemma) hatten wir für eine n-elementige Menge $A \subset \mathbb{R}^D$ unter Verwendung von Zufallsvariablen $(X_{ij}) \subset \mathcal{G}(\nu)$, $i \in \{1, \dots, d\}$, $j \in \{1, \dots, D\}$, eine Abbildung $W : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^d$ konstruiert, so dass für*

$$d \geq 100 \frac{\nu^2}{\epsilon^2} \ln \left(\frac{n}{\sqrt{\delta}} \right) \tag{1}$$

gilt:

$$\mathbb{P}(W \text{ ist } \epsilon\text{-Isometrie auf } A) \geq 1 - \delta.$$

Wir wollen nun im Fall $X_{ij} \sim \mathcal{N}(0,1)$ die Annahme (1) zu

$$d \geq \frac{16}{\epsilon^2} \ln \left(\frac{n}{\sqrt{\delta}} \right) \tag{2}$$

abschwächen.

a) Definieres Sie für $\alpha \in \mathbb{R}^D$ mit $\|\alpha\| = 1$:

$$\tilde{W}_i(\alpha) = \sum_{j=1}^{D} \alpha_j X_{ij}, \quad W(\alpha) = \left(\frac{1}{\sqrt{d}} \tilde{W}_i(\alpha) \right)_{i=1}^{d}.$$

Welche Verteilungen haben $\tilde{W}_i(\alpha)$ und $\sum_{i=1}^d \tilde{W}_i(\alpha)^2$?
Erklären Sie, warum $\sum_{i=1}^d (\tilde{W}_i(\alpha)^2 - 1)$ sub-Γ-verteilt mit Varianzfaktor $2d$ und Skalenparameter 2 ist!

b) Zeigen Sie für $t > 0$

$$\mathbb{P}\left(|\sum_{i=1}^{d} \left(W_i(\alpha)^2 - 1 \right)| \geq 2\sqrt{dt} + 2t \right) \leq 2\mathrm{e}^{-t}.$$

c) Folgern Sie

$$\mathbb{P}\left(\|W(\alpha)\|^2 - 1| \geq 2\sqrt{\frac{\ln(n^2/\delta)}{d}} + 2\frac{\ln(n^2/\delta)}{d} \right) \leq 2\frac{\delta}{n^2}.$$

Übung 14 (Forsetzung der vorherigen Aufgabe)**.** *(Fortsetzung der vorherigen Aufgabe)* *a) Folgern Sie für eine N-elementige Teilmenge T der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^D$*

$$\mathbb{P}\left(\max_{\alpha\in T}\|W(\alpha)\|^2-1|\geq 2\sqrt{\frac{\ln(n^2/\delta)}{d}}+2\frac{\ln(n^2/\delta)}{d}\right)\leq 2N\frac{\delta}{n^2}.$$

b) Folgern Sie die Aussage des Johnson-Lindenstrauss-Lemmas unter der Annahme (2) *für den Fall $X_{ij}\sim\mathcal{N}(0,1)$.*

Proof. a) $\tilde{W}_i(\alpha)\sim\mathcal{N}(0,\|\alpha^2)=\mathcal{N}(0,1)$. $\sum_{i=1}^d\tilde{W}_i(\alpha)^2$ ist χ^2-verteilt mit d Freiheitsgraden bzw. Γ-Verteilit mit Parametern $a=d/2$, $b=2$. Damit ist es (nach Abschnitt 2.4 der Vorlesung) sub-$\Gamma(ab^2,b)$-verteilt, also in $\Gamma(2d,2)$.

b) Das ist die Chernoff-Schranke für sub-Γ-verteilte Zufallsvariablen (die 2 kommt daher, dass wir linke und rechte Schranke aufsummieren).

c) Substituiere $t=\ln(n^2/\delta)$ und teile in $\mathbb{P}(\ldots)$ durch d.

d) Union bound:

$$\mathbb{P}(\max_{i=1}^N X_i\geq t)\leq N\mathbb{P}(X_1\geq t).$$

e) Wie in Vorlesung: können uns auf wegen Linearität auf Differenzen $\frac{a_i-a_j}{\|a_i-a_j\|}$, $a_i,a_j\in A$ zurückziehen. Von diesen Differenzen gibt es $N=n(n-1)/2\leq n^2$ Stück und wir haben $2N\delta/n^2\leq\delta$.
Es bleibt noch zu zeigen, dass (2) impliziert, dass

$$2\sqrt{\frac{\ln(n^2/\delta)}{d}}+2\frac{\ln(n^2/\delta)}{d}\leq\epsilon.$$

Dazu berechnen wir

$$2\sqrt{\frac{\ln(n^2/\delta)}{d}}+2\frac{\ln(n^2/\delta)}{d}\leq 2\sqrt{\frac{2\epsilon^2\ln(n/\sqrt{\delta})}{16\ln(n/\sqrt{\delta})}}+2\frac{2\epsilon^2\ln(n/\sqrt{\delta})}{16\ln(n/\sqrt{\delta})}\leq\epsilon\sqrt{1/2}+\epsilon/4\leq\epsilon.$$

Das war zu zeigen (Eigentlich besagt das Johnson-Lindenstrauss-Lemma, dass

$$\mathbb{P}(\max_{\alpha\in T}\|W(\alpha)\|^2-1\leq\epsilon)\leq 1-\delta,$$

aber das folgt sofort durch Übergang zum Gegenereignis).

□