

Konzentrationsungleichungen

Übungsblatt 8

TU Dortmund, Sommersemester 2017

Prof. Dr. Ivan Veselić, Matthias Täufer

Übung 15 (4 Punkte). Seien $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ monoton fallend und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend. Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ und X eine Zufallsvariable so dass

$$\mathbb{E}[f(X)h(X)] \leq \mathbb{E}[h(X)] < \infty.$$

Zeigen Sie

$$\mathbb{E}[f(X)g(X)h(X)] \leq \mathbb{E}[g(X)h(X)].$$

Übung 16 (4 Punkte). Seien X, Y Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathbb{P}) mit gemeinsamer Dichte $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \infty)$. Wir bezeichnen mit $f_Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$ die Randdichte von Y und setzen für $y \in \mathbb{R}$:

$$f_{X|Y=y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}.$$

a) Zeigen Sie, dass für jedes $y \in \mathbb{R}$, $f_{X|Y=y}$ Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf \mathbb{R} ist.

b) Sei $X \in L^1(\Omega)$. Definieren Sie $\mathbb{E}[X | Y = y] := \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_{X|Y=y}(x) dx$ sowie

$$\mathbb{E}[X | Y](\omega) := \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_{X|Y=Y(\omega)} dx.$$

Zeigen Sie für jedes messbare $A \subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[X \chi_A(Y)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y] \chi_A(Y)].$$

c) Wie vereinfacht sich die Dichte $f_{X|Y=y}$, wenn X und Y unabhängig sind?

d) Zeigen Sie, dass für unabhängige X und Y die Zufallsvariable $\mathbb{E}[X | Y]$ fast sicher konstant ist und berechnen Sie diese Konstante.

Abgabe und Besprechung am 13.06.2017 in der Übung.